京都大學經濟學會

經濟論叢

第六十六巻　第一・二・三號

昭和二十五年九月

經濟關係の計量とその推計學的基礎

阿部 統

目次

一 序説

經濟構造を規定する諸種の係數を數量的に測定することは、計量經濟學 (Econometrics) が創始以來その使命とするところであるが、一九四〇年代に入つて、それがもつ内容は飛躍的な變革をとげた。その一つは確率論に基

礎をおく近代統計理論と結びつくことによつて、その二はそれが政策目的のための計畫樹立に決定的な重要性を擔うことによつて。從つて、從來例えば小賣價格や卸賣價格の如き「マーケット・バロメーター」の皮相的な分析、或いは精々時系列の上昇・下降の移り行きを記述的に追及するにとどまつていた段階は克服されて、生産・投資・消費・雇傭・所得等、經濟活動に最後的な歸結をもたらす諸因子の多角的相互依存關係を説明する理論的枠組と、それを計量的に分析するための統計學的武器とを整備することが、この學問の最も大きな任務となつた。[1]

然し、かかる基調の變化は勿論計量經濟學にのみ見られるものではない。それはむしろ政治・經濟思想の一般的傾向を反映するものと言うことが出來る。例えば特に農民層の經濟福祉を考え、農産物の價格、生産量等の調整に大きな關心をもつ政治家がおつても、彼は農業問題に關する知識だけでは充分なる施策を期待し得ない。何故なら經濟現象の複雜な相互依存性の故に、經濟界の非農業層をも支配する經濟機構とその機能を理解しなければ、農業層における經濟條件に對して充分な説明をなし得ないからである。非農業層における高所得は農業が繁榮するための必然的な條件であるし、逆に農民における高所得は農業以外の經濟系が榮えるための必要條件でもある。成程農産物價格の上昇は農民の所得を增すであろうが、これが非農業層から農業層への實質所得の轉化を意味するものか、或いは經濟系全體の總實質所得と雇傭の增大に起因するものであるかは、經濟系全體を見透す知識（例えば經濟系の各層がもつ價格及び所得變動に關する彈力性の如き）がなければ分らない。從つて、農民の需要函數或いは供給函數をそれ自體に關する資料だけから測定するにとどまつていた今までの計量的研究は、全く用をなさないと云わねばならない。

かくて、かかる經濟系の各層にわたる多角相互依存關係の機能とその歸結を説明する理論的枠組の必要を見る

事を、本稿の第一の目的としよう。

さて、このような理論的枠組と統計的計測との間には何の關係もないように思われるかも知れない。何故なら、統計的武器によつて或經濟層、例えば農業層の經濟現象を計測する時には、他の諸種の經濟因子は一定と見なされ、これらの因子に對する農民の反應のみが見られるからである。從つてこの立場からは、農民以外の各層の生産、消費等々の決意量は與えられたものとして取り扱われている。然し乍らかかる部分的分析は、統計理論の見地からは多角依存關係を無視しているが故に論理的一貫性を缺く事が指摘される。新しい觀點に立てば、矢張り全經濟系の機能を見透す近接法が必要なのであり、從つて農業層には外生的變數 (exogenous variables) として現われる諸量も、窮極の分析には、農業層のこれらの變數に對する變動効果によつて逆に影響されることが强調される。今まで經濟關係の計量に多く用いられて來た回歸分析 (regression analysis) はこの理由で斥けられ、最早《同一の資料から需要曲線と供給曲線を求める事》に關する古典的な文獻は、全體的見透しに對する合理的一貫性を缺いた論爭のよい例として記憶されるにとどまつている。

最近の統計理論におけるめざましい發展は、これらの問題を取り扱うのに極めて有用な新しい武器を提供する。この方面の追及を本稿の第二の目的としよう。それによつて經濟系の種々の側面に働く現象は、種々の變數が同時に語られた時にのみ眞に理解され、最早《他の條件一定》なる假定は我々の計量的分析から取除かれる事が説明されるであろう。

ところで、こうして供給關係、需要關係、或いは生産函數等々の經濟法則が經濟系の諸變數の相互依存關係の説明を通じて正確に推測されたとして、この成果は一體何に利用されるのであろうか。云うまでもなく、その一

部分は科學的好奇心 (scientific curiosity) を滿足するためのものであるけれども、もつと實際的な理由があることも忘れてはならない。經濟因子の多角依存關係を知ることは、明かに大局的な政策效果――例えば租税、補助金、公共支出、價格統制、分配等々の諸政策がもたらすものを充分に且つ正しく理解するために必要缺き得ないものである。經濟政策に關する政治論爭は、往々にして、それがねらう特定目的に到達するための手段に關する場合よりも、その政策目的自體が好ましいか、好ましくないかに關する場合が少くない。一定の目的に到達するための手段は、政治家にとつて直接且明瞭なものとされている。例えば輿論が農民階級の不當な低所得を訴えたとしたならば、議會は直ちに農産物價格の引上げ或いは補償を認める法律を可決すればよいと考えるであろう。然し經濟學的觀點からは、かかる法律が經濟系の他の方面に及ぼす間接的な效果と、その效果が逆に問題の政策自體に及ぼす波及 (repercussion) 效果にこそ關心がもたれるのである。かかる波及效果を跡づけようと思えば、經濟系が全體として如何に動くかを分析する合理的なモデルがなければ、到底期し得ないことは云うまでもない。

では、一定の政策手段が導入される以前に、經濟系の構造を記述する相互關係の枠組からどうして新しい政策が施された後の樣相を知り得るかが問題となろう。それに答うるには、先ず政策自體の性質が明かにされねばならない。政策の中には、單に政府の決意を示す或經濟變數の數値を變えるにとどまり、民間經濟層にはその變數の性質がもともと與えられたものとされているが故に、何らその行動基準を變えるものとはならないものがある。云い換えれば、種々の民間層の行動基準を記述する古い關係式に新しい變數の値を代入しさえすれば、政府の政策の變動效果が計算出來るものがある。或種の輸入品に對する關税、一定の租税體系における税率の變化等がその例である。またこれに反して、民間層の行動基準を全然變えてしまうような、或いはその一部の層の行動

計畫 (behavior pattens) を他の層から切り離すような政策も考えられる。例えば、或商品の供給を調整する目的をもつ政策で、需要側の行動計畫に全然影響を與えぬものは、その政策效果を古い需要函數と新しい供給函數から計算することが出來るであろう。

このような計量的研究の方向は、必然的に經濟量の豫測の問題と結びつき、政府の經濟計畫に對する指針を提供する。即ち、或種の政府計畫が一定目的に對して如何なる效果をもたらすか、逆に言えば、目的に對して出來るだけ民間層の自由を束縛することなく、然も有效な效果をあげるためにはどうすればよいかを、我々はこの全經濟系を說明する理論的枠組とその統計的處理とによつて知るのである。[2] 簡單に以上の事を前置きして直ちに本論に入ることにしよう。

(1) クープマンスは、この二つの段階を天文學の發展段階に對比して「ケプラー的段階」("Kepler stage")「ニュートン的段階」("Newton stage") と呼ぶ。T. C. Kooymans, "Measurement Without Theory". *The Review of Economics and Statistics*, Oct. 1947 pp. 161—72 更に R. Vining "Koopmans on the Choice of Variables to be studied and Methods of Measurement", *The Review of Economics and Statistics*. May 1949 p. 77 を見よ。

(2) この問題に關する更に詳しい議論は J. Marschack, "Economic Structure, Path, Policy and Prediction," *American Economic Review*, May 1947, pp. 81—84 にある。

二　モデル・アナリシスの必要とその一例

經濟現象の計量的研究の主なる目的の一つが、經濟系の種々の層 (sectors) をつなぐ多角的な相互依存關係の機

能と歸結を說明する理論的枠組の構成と、その測定にあることは前述の通りであるが、今簡單な例によつてこの問題をもう少し細く見ることにしよう。農民層の年々の純所得の變動を例にとる。ここに純所得とは

(非農業層への賣上高) ＋ (資産勘定の純變動額) － (非農業層に對する支出) ＋ (農民層の總消費額)

で定義する。從つて農業所得の變動を知るには、農業生產のインプット・アウトプットを支配する技術的關係の他に、農民の生產・生產手段の購入・農場の改善等に對する諸決意を記述する關係式をも詳かにしなければならない。これらの諸種の經濟的な決意や行爲を、農業層の內部においてのみ說明しようと試みるのは全く不可能であり、例えば農業機械や他の生產手段の費用、非農業層からの消費財の購入費用、工業勞賃とその農業勞働の供給に與える影響、非農業層において農產物に支拂われる價格等々、多くの非農業部門の要素が問題の枠內に入つて來るのを知るであろう。

農民の生產・消費等に關する決意、卽ち、農民の經濟行爲の觀點からのみ見るならば、非農業層に關する因子は所謂「外生的變數」(exogenous variables) と見なされ、農民自身の行爲には影響を與えぬものと考えられるかも知れない。云い換えれば、農民の計畫にとつて、これらの因子は自動的に外部から與えられたものとして取り扱われると考えられるかも知れない。然し乍ら、この事實は決して外部的因子が常數値をとり、それが農民層內部の經濟行爲に獨立である事を意味しはしない。たとえ農業の生產水準、農民の消費量、農業機械えの支出、貯蓄等々の項目を (外部から與えられると考えられる因子によつて) 說明し得たとしても、尙且つ各變數についての絕對的な敍述がなし得たとは云い得ない。それがなされるためには、非農業層で決定されると思われる因子が、

今度は農業層の經濟活動によつて如何に影響されるかを知らねばならぬであろう。例えば、農産物が賣られるための價格水準は、恐らく非農業部門の所得水準によつて決まると考えられる。從つてこの價格水準を知るためには、先ず農民以外の人々の可能な所得水準を考え、この所得の下での價格水準を計算するのが常である。然し云うまでもなく、非農業層の所得が、農民達の所得が如何樣なものであり、それによつて非農業部門の生産物の價格がどう決まるかに依存する。かく考えれば、單に農産物の需要・供給に關する行爲法則を計量するだけでも、分析の中に含まれるあらゆる可變要素は、窮極において、豫めエクスプリシットリイに知られる若干の項目及び政府の行爲に基いて自働的に決定される幾つかの要素によつて説明されつくされねばならない事が知られるであろう。

これが、經濟系の種々の部門の多角的な相互依存關係を知るためには、種々の經濟變數を結ぶ完全にして決定的な構造式體系（Structural Equation System）―モデル―をつくりあげねばならない理由である。勿論かかる着想は古くはフィジオクラートにまで溯り、後にレオン・ワルラスによつて最も典雅に展開された經濟理論の傳統的な基礎であるけれども、現在多くの經濟學者の關心はこのような經濟變數の依存關係を計量的に知る事にむけられているのである。

さてここで上述のモデル・アナリシスをすすめるに當つて、今經濟系をその原則的な行爲に從つて消費層（consuming sector）と生産層（producing sector）の二つに分類して考えよう。勿論、人がこの兩層に同時に含まれても構わない。消費層の經濟機能は、勞賃、利潤等の所得を受けとつてそれを消費財の購入及び貯蓄にふり分けることである。他方生産層の經濟機能は、個人（乃至は消費層）に對する所得を支拂い、消費財を供給することにある。

もし生産層が消費財の賣上高以上に所得を支拂うならば、その差額は投資された事になる。この投資支出、つまり賣上高と支拂高の差額は、ストックの純變動額と生産層の手許にある設備、機械の純增加價値からなる。更に輸出入はすべて生産層の手を經るものと考え、貿易差額は常に右に規定した投資支出に對する附加額として取扱う。

ここで生産層を更にその供給する消費財の型に從つて、二つの層に分とう。第一層は消費者に食糧を生産・供給する層であり、第二層は食糧以外の消費財を供給する層である。從つて第一層には農民、農産物加工業、食糧販賣業等が含まれ、第二層にはその他の生産、販賣をなす人々が含まれて、その何れも個人に對して何らかの形の所得を提供するものである。その他この二つの生産層に一定の財及び用役の振替が考えられるが、その額は個人に對して支拂う總所得に對して極めて小さいものとする。また租税を無視しよう。

右の前提に基いて次の記號を決める。

x_1 = 毎年の（消費者に對する）食糧の販賣量

x_2 = 毎年の（消費者に對する）食糧以外の消費財販賣量

P_1 = x_1の單位價格

P_2 = x_2の單位價格

I = 二つの生産層の年々の純投資支出總額

Y = 個人の年々の所得總額

P = 生計費指數

人口の變動効果は一人當りの數値を計算することによつて、毎年調整するものとする。すると、上述の定義から個人の所得總額Yは

$$Y \equiv x_1P_1 + x_2P_2 + I$$

從つて

$$(1)\quad \frac{Y}{P} \equiv x_1\frac{P_1}{P} + x_2\frac{P_2}{P} + \frac{I}{P}$$

である。また生計費指數PはP_1・P_2の一次函數であり

$$P = e_1P_1 + e_2P_2$$

即ち

$$(2)\quad e_1\frac{P_1}{P} + e_2\frac{P_2}{P} = 1$$

で定義されるものとする。ここにe_1・e_2は食糧及び非食糧の夫々が生計費指數にもつウエイトである。

更に理論的分析或いは日常經驗から消費者支出はその所得の函數である（兩者とも生計費指數でデフレートして）事が云える。從つてそれを近似的に一次と考えれば

$$(3a)\quad \frac{x_1P_1+x_2P_2}{P} = a_1\frac{Y}{P} + a_0$$

ここでa_1・a_0はある常數であり、a_1は特に「限界消費性向」と呼ばれるものである。これを(1)に代入して次の關係を得る。

$$(3)\quad \frac{Y}{P} = a_1\frac{Y}{P} + a_0 + \frac{I}{P}$$

さて消費者はその支出を食糧と非食糧との間にどのようにふりわけるであろうか。それには食糧に對する支出額が分りさえすればよいが、經驗的に食糧に對する需要は食糧價格及び所得の函數（兩者を生計費指數でデフレートして）と考えられるから、一次式をとつて

$$(4)\quad x_1 = b_1\frac{P_1}{P} + b_2\frac{Y}{P} + b_0$$

とすることが出來る。ここに b_1・b_2・b_0 は常數である。

これによつて(1)(2)(3)(4)の四つの方程式を得たが、變數は七つある。殘りの自由度（degrees of freedom）三は、x_1・x_2 の供給に對する決意と、投資支出 I を決定する決意に關する方程式をもたぬ事に基いている。若し我々が變數の過去の觀察値を說明しようと思えば、これらの決意に關する性質を知らねばならない。恐らくそれは價格、販賣高その種々の變數に依存するであろうが、ここでは立入らないことにする。從つて我々は變數 x_1・x_2 の値を變えようとする直接的な決意が P_1/P・P_2/P・P/Y に如何なる影響を與えるかを——卽ち、若し二つの生產層が x_1・x_2・I の數量を自ら決め得る立場にあるとしたら、消費層が(3a)及び(4)に從つて行動するとして、實質所得 Y/P 及び價格 P_1/P・P_2/P にどのような影響を及ぼすかを見ることにしよう。例えば、x_1・x_2・I が事實上自發的な調整をうけるような新しい經濟政策が導入されたことを考えればよい。

さて右の問題に對する解答は、我々の方程式體系のどの一つをセパレートして考えても得られぬことは云うまでもない。唯一の方法は、聯立方程式(1)(2)(3)(4)を解いて、各變數 P_1/P・P_2/P・P・Y/P を x_1・x_2・I で現わすことである。計算を省略するけれども、例えば食糧價格 P_1/P に對して次の解を得る。

$$(5)\quad \frac{P_1}{P}=\frac{e_2(a_0b_2+a_1x_1-a_0b_0)-b_2x_2}{a_1b_1e_2+(x_1e_2-x_2e_1)b_2}$$

同様の解をP_2/P・Y/P・Pに對しても得ることが出來るが、(5)から次の事を知るであろう。即ち、《食糧の生産者がその供給量x_1を變動させようとする場合、たとえ食糧以外の消費財の供給量x_2・及び投資支出Iが一定であっても、食糧の實質價格P_1/Pの變動はパラメーターa_1・a_0・b_1・b_2・b_0・e_1・e_2及び變數x_1・x_2の値に依存する。換言すれば、供給量の變動が價格に與える總效果は、今までよくやられたようにその財の單純なる「需要の彈力性」(elasticity of demand)のみからでは分らない。全經濟系の構造を通じたもっと複雑な方法によらねばならない》と云うこと、これである。

このことを、別の觀點から眺めよう。今

$$\frac{P_1}{P}=p_1,\quad \frac{P_2}{P}=p_2,\quad \frac{Y}{P}=y$$

でノテイションをおきかえ、(1)—(4)の方程式を次のように書きかえる。

$$(1)'\quad y=x_1p_1+x_2p_2+\frac{I}{P}$$

$$(2)'\quad e_1p_1+e_2p_2=1$$

$$(3)'\quad y=a_1y+a_0+\frac{I}{P}$$

$$(4)'\quad x_1=b_1p_1+b_2y+b_0$$

さて、x_2・Iは一定として、x_1の變動がp_1・p_2・y及びPに及ぼす效果を考えよう。それには偏微係數

$$\frac{\partial p_1}{\partial x_1},\quad \frac{\partial p_2}{\partial x_1},\quad \frac{\partial y}{\partial x_1},\quad \frac{\partial P}{\partial x_1}$$

を計算すればよいから、(1)′―(4)′を夫々 x_1 について偏微分すれば

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial x_1} - x_1\dfrac{\partial p_1}{\partial x_1} - x_2\dfrac{\partial p_2}{\partial x_1} + \dfrac{I}{P^2}\dfrac{\partial P}{\partial x_1} = p_1 \\ e_1\dfrac{\partial p_1}{\partial x_1} + e_2\dfrac{\partial p_2}{\partial x_1} = 0 \\ (1-a_1)\dfrac{\partial y}{\partial x_1} + \dfrac{I}{P^2}\dfrac{\partial P}{\partial x_1} = 0 \\ b_2\dfrac{\partial y}{\partial x_1} + b_1\dfrac{\partial p_1}{\partial x_1} = 1 \end{cases}$$

これを Cramer の公式によつて解くに、先ず分母として係數の行列式を計算すれば

$$(7)\quad \begin{vmatrix} 1 & -x_1 & -x_2 & \dfrac{I}{P^2} \\ 0 & e_1 & e_2 & 0 \\ (1-a_1) & 0 & 0 & \dfrac{I}{P^2} \\ b_2 & b_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{I}{P^2}\{a_1b_1b_2 + (x_1e_2 - x_2e_1)\,b_2\}$$

この結果から $\dfrac{\partial p_1}{\partial x_1}$、$\dfrac{\partial p_2}{\partial x_1}$、$\dfrac{\partial y}{\partial x_1}$、$\dfrac{\partial P}{\partial x_1}$ を求め、それを彈力性形式に改めれば次の解を得る。

$$(8)\quad \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{x_1}{y}=\frac{b_1e_2p_1+b_2x_1-e_1x_2}{a_1b_2e_2+(e_2x_1-e_1x_2)b_2}\frac{x_1}{y}$$

$$(9)\quad \frac{\partial p_1}{\partial x_1}\frac{x_1}{p_1}=\frac{e_2(a_1-b_2p_1)}{a_1b_1e_2+(e_2x_1-e_1x_2)b_2}\frac{x_1}{p_1}$$

$$(10)\quad \frac{\partial p_2}{\partial x_1}\frac{x_1}{p_2}=\frac{-e_2(a_1-b_2p_1)}{a_1b_1e_2+(e_2x_1-e_1x_2)b_2}\frac{x_1}{p_2}$$

$$(11)\quad \frac{\partial P}{\partial x_1}\frac{x_1}{P}=\frac{P^2(1-a_1)(-b_1e_2p_1-e_2x_1+e_1x_2)}{I\{a_1b_1e_2+(e_2x_1-e_1x_2)b_2\}}\frac{x_1}{P}$$

全く同様にして我々はx_2・Iの變動に關する各變數の偏微分、即ち彈力性を計算することが出來る。（この場合行列式(7)は變らず、(6)の右邊のみが變る。）かくてもし(8)—(11)の各パラメーターの數値が分れば、各彈力性の値を算定することが出來るわけであるが、これらの値は云うまでもなく方程式組織に含まれる各變數の水準にも依存する。ハーヴェルモーが基準期間として一九三五—三九年をとりその間の價格指數P_1・P_2・P及び平均所得yを1として計算した所によれば[1]、該期間におけるx_1・x_2及びIの平均値は

$$x_1 = 0.25$$

$$x_2 = 0.65$$

$$I = 0.10$$

となる。更に近似的に生計費指數のウェイトe_1・e_2がx_1・x_2に比例するものとすれば

$$e_1 = 0.25\cdot\frac{100}{90}$$

$$e_2 = 0.65 \cdot \frac{100}{90}$$

これらの結果からパラメーター a_1・b_1・b_2 を推定して

$$a_1 = 0.7$$

$$b_1 = -0.06$$

$$b_2 = 0.07$$

が得られた。これらの推定値を用いて上述の各彈力性を計算した結果は次の通りである。

$$(8') \quad \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{x_1}{y} = 0.36$$

$$(9') \quad \frac{\partial p_1}{\partial x_1}\frac{x_1}{p_1} = -3.75$$

$$(10') \quad \frac{\partial p_2}{\partial x_1}\frac{x_1}{p_2} = 1.45$$

$$(11') \quad \frac{\partial P}{\partial x_1}\frac{x_1}{P} = -1.07$$

この事から次の事が云える。即ち投資支出 I・及び食糧以外の消費財の供給量 x_2 が一定であるならば、食糧供給量の一パーセントの增加は夫々次の結果をもたらす。

（イ）消費者の實質所得を〇・三六パーセント增加する。

（ロ）食糧の實質價格を三・七五パーセント下落させる。

(ハ) 食糧以外の消費財の實質價格を一・四五パーセント騰貴させる。
(ニ) 生計費指數を一・〇七パーセント下落させる。

上述の結論が正しいためには、勿論パラメーターの統計的計測及びその抽出誤差が正しく算定されていなければならないし、また更に注意深い研究を進めようと思えば、我々が上に用いた實驗的推定値を現實と付合してみなければならない。然しこの初歩的な結果からだけでも、經濟系の構造に何らかの變動が起つた場合、その效果を正しく見るためには右のような分析（モデル・アナリシス）が必要であることを例證するに充分であろう。

最後に、我々の經濟關係の計量的分析に用いる手順を整理すれば次の如くである。

(1) 問題の新しい構造に關する正確な記述と、そのフォーマルな分析を行う。
(2) 現行の經濟構造のどのパラメーターと如何なる性質が新しい構造にくりこされるかを知るために、現行の構造について正確な記述を行う。
(3) 二つの構造に共通するパラメーター乃至は性質を、現行の構造に基く觀察値から推定する。
(4) かかる推定値を用いて、新しい構造の下に如何なる結果を來すかを豫測する。

本章では(2)・(3)は他の研究から適當に知り得たとして、(1)と(4)とに關する問題のみを取り扱つた。ではかかる經濟パラメーターを如何にして正しく推測するか。これが次の問題である。

(1) T. Haavelmo, "Quantitative Research in Agricultural Economics: The Interdependence between Agriculture and the National Economy", *Journal of Farm Economics*, Nov. 1947, pp. 922—923.

三　最小自乘法と誤差項の自己相關について

經濟關係の理論的枠組の中に入つて來る種々のパラメーターを統計的に推定することは今までも計量經濟學においてなされて來たが、その際最も一般的に用いられる統計技術は多邊相關分析 (mulfivariate regression analysis) であつた。所謂最小自乘法 (least square regression method) によつて、種々の經濟變數の間の關係がそれ自體に關する資料だけから求められて來たけれども、その關係式が係數の最良不偏推定値 (best unbiased estimates) を與えるためには一定の條件が必要である。今從屬變數 x_{1t} と、一組の獨立變數 $x_2 \cdots\cdots x_p$ の間に

$$x_{1t} = b_0 + \sum_{j=2}^{p} b_{1j} x_{jt} + U_t$$

なる關係があるとすると、その條件は

（イ）誤差項 U が自己相關を有しない (nonautocorrelated)。即ち $E(U_t U_{t-h})=0$ (但し $h \neq 0$)

（ロ）變數 x_{jt} ($j=2, \cdots\cdots p$) は誤差項 U_t に關して獨立である。即ち $E(x_{jt} U_t)=0$ ($j=2, \cdots\cdots p$)

ならば滿足される。[1] 從來最小自乘法が經濟資料に適用される場合には、當然かかる前提が妥當することを假定していた。この前提が果して經濟現象に妥當するかどうかは大きな問題であるが、一般に經濟パラメーターの推計にあらわれる主なる困難はこれを含めて次の三つの分類出來る。

(1) 變數間の聯立方程式關係の存在

(2) 自己相關誤差項の問題

(3) 各變數自體の觀察誤差の問題

前章でも述べた如く、經濟現象の分析はモデル・アナリシスに基いて、具體的には單一方程式ではなく聯立方程式を解くことによてなされねばならないけれども、同じことはパラメーターの推定の場合にも云い得る。經濟システムを說明する聯立方程式のどの一つの方程式のパラメーターを推計する場合にも、その他の關係式の存在を考慮に入れるのでなければ到底正確な推計は期し得ない。例えば、或財に關する數量と價格はその財の需要方程式、及び供給方程式の兩者に變數として取り入れられるものと考えられる。從つてもし我々が《その財の價格の上への消費量の回歸》のみを考えて需要方程式を求めようとするならば、價格は獨立變數でなく供給關係の性質に依存する變數であることを全く無視していることになる。この問題はフリッシュ[2]及びハーヴェルモー[3]によつてとりあげられて以來、クープマンスその他によつてその解決に最近多くの努力がなされている。即ちかかる場合、問題の變數には、方程式組織がもつストカスティックな關係を反映して同時正規確率分布 (joint normal probability distribution) を考えねばならない事が指摘される。然しこの分析には方程式の誤差項には自己相關關係がなく、且つそれが正規分布をなす事、及び各變數自體には觀察誤差がない事を前提している。

聯立方程式によるパラメーター推計の接近法の詳細については後の章に述べる所であるが、大標本であれば、この同時確率分布に基く最尤推定値 (estimate of the maximum likelihood method) は、漸近的に不偏推定値を與え、有效な統計量を提供する事が分る。[4] この方法によつてパラメーターを推計するには、先ず方程式組織を誘導形

(reduced form) と云う形に書きかえて、各內生的變數 (endogenous variables) を外生的變數 (exogenous variables) 及び時間のずれを伴つた內生的變數 (lagged value of the endogenous variables) によつて解き表す事を考える。これらの解は夫々一次方程式の形になつているであろうから、今度は最小自乘法を有效に使つて——この場合各外生的變數が獨立變數と考えられる——パラメーターを推計する事が出來るのである。この形の係數は前述の如く、大標本に對して最良不偏推定値であると云う性質をもつている。かくて、もとの方程式の構造係數 (structural parameter) がこれらの推定値からきめられるわけであるが、この際注意せねばならぬのは、何時もきまつて必ずしも誘導形の係數の推定値からもとの方程式の構造係數をアイデンティファイすることが出來るとは限らぬことである。第五章でこの問題 (identification problem) について說明する。

次に自己相關誤差項の問題は、今までも time-series complication と呼ばれて可成りの注意が拂われていた。變差法 (variate difference method) に關するティントナーの力作[5]を始め、大低の經濟時系列の分析書はこの問題をとり扱つている。もつと直接的に問題に接近して自己相關系列のコリレイション (correlation) の分布を調べた研究も決して少くなく、[6] その多くは歸無假設 (null hypothesis) の形でこの問題をとり扱つている。然し系列間の函數關係の測定を論じたこれらの論文の中で、分析にとつて重要な要素となるものは誤差項の自己相關であり、時系列そのものの自己相關ではない事を明かにしたものは殆どない。[7] 本稿においては、本章の後半においてこの問題を取り扱おう。

第三の觀測誤差の問題は、說明すべき變數 (explanatory variables) が誤差なしに測定される場合には起らない問題であるが、それだけに經濟資料に適用するには重要な問題である。誤差の相關行列 (correlation matrix) に關す

る完全な知識がない場合には、《各變數の誤差は、各變數のシステマティック・パートに關しても、他の變數の誤差に關してもランダムであり、相關しない》と云う單純な假說が設けられねばならない。[8)]

さて本章においては、經濟關係における自己相關誤差項の出現に關する若干の問題を取り扱おう。大低の現行の經濟關係式に含まれる誤差項は、高度に自己相關を有するものと考えられ、然もその場合には當然推定値にバイアスを生ずるから、通常の最小自乘法による推定には幾らかの變容を施さねばならない事が結論される。尚問題を自己相關誤差に集中するために、聯立方程式を解く事及び變數の觀測誤差から來る困難は一應捨象することにする。

ここで最小自乘法の根底に横わる假說をもう一度考えて見よう。x_{1t}・x_{2t}……x_{kt}なる變數の間に次の一次關係が存在するものとする。

(1) $$x_{1t}=\alpha+\sum_{j=2}^{k} b_{1j}x_{jt}+U_t$$

ここにU_tは一定の分散(variance)をもつ誤差項であり、α・bは決定さるべき常數たるパラメーターである。もしx_{2t}……x_{kt}が射倖誤差(random error)U_tに對して獨立ならば、これらの係數の最良一次不偏推定値(the best linear unbiased estimate)は最小自乘法によつて與えられる。最良推定値とは最小の分散をもつ推定値を云う。これは獨立變數が自己相關する場合でも、それらが反覆標本(repeated samples)において極つたものと考えられるならば眞である。[9)] 更にもし誤差項が正規分布をしているならば、最小自乘推定値は最尤推定値となることは云うまでもな

い。[10)]

從來、多くの經濟關係は誤差項が時間的に相互に獨立していると假定しているが、これは明かに行き過ぎであつた。アイティキンは誤差項が自己相關をもつならば、最小自乘法は誤差系列における獨立性の缺除がしんしゃくされる限り、尙回歸係數の最良不偏推定値を與える事を證明している。[11)] この場合誤差項の獨立性の缺除を克服する一つの方法は、すべての變數を誤差項の自己回歸的構造に應じて變換する事によつて、誤差項をランダム化することである。今

(2)　$y_t = a_0 + a_1 x_t + U_t$

なる一次關係があるとする。更にU_tはマルコフの型式 (Markoff scheme)

(3)　$U_t = \beta U_{t-1} + \varepsilon_t$

によつて一般化しうるものとする。ここにε_tは射倖的な攪亂要素 (random disturbances) であり、βは既知の自己回歸係數 (autoregression coefficient) である。U_tを(2)に代入して

(4)　$y'_t = a'_0 + a_1 x'_t + \varepsilon_t$

を得る。ここに

(5)　$y'_t = y_t - \beta y_{t-1}$

(6)　$x'_t = x_t - \beta x_{t-1}$

である。こうして方程式(4)について最小自乘法を用いれば、回歸係數a'_0・a_1の最良一次不偏推定値を得る。

これは極めて簡單な例についてのべたが、もつと一般的な場合についてこの事を考えて見よう。この場合誤差

系列は矢張り單純なマルコフ型式に從うものとする（アイティキンはもつと一般化してやつている）。

最初に誤差が自己相關をしない最小自乘の簡單な場合を考える。yに關する列ヴェクトル (column vector)

(7) $y = \{y_1 y_2 \cdots\cdots y_n\}$

の近似代表値を列ヴェクトル

(8) $z = \{z_1 z_2 \cdots\cdots z_n\}$

で表わし、それは $(k+1)$ 組の先決函數

(9) $1,\ x_{1t},\ x_{2t}, \cdots\cdots x_{kt}\quad (t=1, \cdots\cdots, n)$

に關して一次であるとする。Pをこれらの先決函數値のマトリックスとすれば、その第i行は行ヴェクトル

(10) $[1,\ x_{1i},\ x_{2i}, \cdots\cdots, x_{ki}]$

となる。するとPの次數は$n\times(k+1)$であり、n箇の變數$x_{i1}\cdots\cdots x_{in}$に關する一次獨立の制限に從い、その階數は$(k+1)$である。$a$を$(k+1)$箇の係數の列ヴェクトルとすれば

(11) $a = \{a_0 a_1 a_2 \cdots\cdots a_k\}$

從つてz_i組はヴェクトル

(12) $z = Pa$

で示される。もしyが相互に獨立ならば、最小自乘法の原理により殘差 (residuals) の平方の和は最小になる。從つて

(13) $s^2 = (y-Pa)'(y-Pa)$

とすれば $\partial s^2/\partial\alpha=0$ より正規方程式 (normal equations) の組

$$(14)\quad P'P\alpha = P'y$$

を得る。ここに P' 及び y' は P 或いは y の轉置行列乃至はヴェクトルである。今この簡單な場合を自己相關誤差の場合に擴張するに、若しすべての誤差項を $n\times n$ 次のシムメリック・マトリックス U の要素に、夫々の分散及び共分散に應じて整理すれば、最小自乘推定値は

$$(15)\quad (y-P\alpha)'U^{-1}(y-P\alpha)$$

を極小ならしめることによつて得られる。U^{-1} は U の逆行列 (inverse matrix) である。從つて、右の方法に基いて偏微分すれば、もつと一般的な正規方程式

$$(16)\quad P'U^{-1}P\alpha = P'U^{-1}y$$

を得る。

さてこの一般的な結果を、上述の我々の簡單な例に適用して見よう。方程式(2)、(3)に見た如く、一次方程式

$$(17)\quad Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_t + U_t\ (t=1,\ldots\ldots,n)$$

を考え、U_t は單純なマルコフ過程

$$(18)\quad U_t = \beta U_{t-1} + \varepsilon_t\quad (\beta < 1)$$

で定義されるものとする。ここに β は既知の常數、ε_t は射倖的な攪亂要素である。すると誤差項の分散・共分散マトリックスは、次の $n\times n$ 次のシスメトリック・マトリックスで表わされる。

$$(19)\quad U=\frac{1}{1-\beta^2}\begin{pmatrix} 1 & \beta & \beta^2 & \cdots\cdots & \beta^n \\ \beta & 1 & \beta & \cdots\cdots & \beta^{n-1} \\ \beta^2 & \beta & 1 & \cdots\cdots & \beta^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \beta^n & \beta^{n-1} & \beta^{n-2} & \cdots\cdots & 1 \end{pmatrix}$$

これから逆行列を作れば

$$(20)\quad U^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -\beta & 0 & \cdots\cdots & & 0 \\ -\beta & 1+\beta^2 & -\beta & \cdots\cdots & & 0 \\ 0 & -\beta & 1+\beta^2 & \cdots\cdots & & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & \cdots & \cdots & 1+\beta^2 & -\beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & -\beta & 1 \end{pmatrix}$$

となる。またマトリックスPは第i行が

$$(21)\quad [1\ \ X_i]$$

なる$(n\times 2)$次の行列であり、更に係数のヴェクトルは

$$(22)\quad \begin{bmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\end{bmatrix}$$

となる。これらの結果を一般的な正規方程式(16)にあてはめて展開すれば、αの推定値として

$$(23)\quad \hat{\alpha}=\frac{\sum_1^n x_t y_t-\beta\sum_2^n x_t y_{t-1}-\beta\sum_2^n x_{t-1}y_t+\beta^2\sum_3^n x_{t-1}y_{t-1}}{\sum_1^n x_t^2-2\beta\sum_2^n x_t x_{t-1}+\beta^2\sum_3^n x_{t-1}^2}$$

を得る。ここでx_t、y_tは平均値

$$(24)\quad \bar{x}=\frac{1}{n-\beta(n-2)}\left\{\sum_1^n X_t-\beta\sum_2^n X_t\right\}$$

からの偏差を示している。(23)は全く一般的な推定値であり、ε_tの分布に關しては何の假定をも含んでいない。ここでε_tが正規分布をなすと假定すれば、(23)は最尤推定値になる筈である。

以上見て來たように、誤差項が自己相關をなす場合には通常の最小自乘法によるパラメーターの推定には、若干の變容が加えられねばならない。然らば我々の經濟關係に、誤差項が高度の自己相關をもつと信ずる理由は存在するだろうか。次にこれを見てみよう。

勿論ありとあらゆる場合に誤差項が自己相關を有し、またそれがランダムである關係をつくるのが不可能であると云うわけではないが、經濟時系列には屢々自己相關的性質が起ることは否定し得ないように思われる。米國の經濟システムに關するティンバーゲンの著名なモデル[12]に用いられた五十二の系列は、同一の自己回歸的構造をもつリニアー・ストカスティック・シリーズ (linear stochastic series) の單一母集團から抽出されたものと見なされることが指摘されている。[13] 更に問題を誤差項のみに限定しても、その間に高度の自己相關が存する事は疑ないよ

うに思われる。この原因は次の三つの觀點から探求することが出來るであろう。

第一に、經濟變數の間に存在すると假定する關係式の形を誤つて選擇することによつて、系統的な誤差が起る可能性がある。この場合經濟變數が正の自己相關をなすならば、當然この種の誤差も一般に正の自己相關をなすであろう。適當な時系列を缺く場合には、かかる關係式の設定はさけ難く、從つてこの種の誤差は免れ得ないものと考えられる。

第二に、誤差は、經濟的・非經濟的を問わず、幾つかの變數を分析からオミットすることによつて生ずることがある。あまり有用でない、或いはその重要さが表面に出ない等の理由により、重要な變數が分析から除かれてしまつている事があるであろう。更に又適當な時系列を簡單にするためには、個別的には大して影響をもたない變數を無視する必要がある。それにもかかわらず、かかる變數の影響をすべて一括すれば、その影響は極めて大きいものになり、高度の正の相關をなすかも知れない事が考えられる。[14] 先にふれたように大低の經濟時系列はそれ自體高度の正の相關があると信ぜられるから、除かれた變數が經濟時系列である限り、その結果の誤差項は矢張り高度な正の自己相關を有しているものと考えなければならない。

更に經濟行爲に影響を與えるとは考えられるが、通常その分析からは除かれる非經濟的變數の場合を考えて見よう。そのような變數の代表的なものは、人口、その年令、性、地域的分布、教養の差異、技術的發展、土地の肥沃度の變化を含む鑛物資源の開發及び消耗、氣候状態等である。右の系列の多くは極めて高度の正の自己相關をなしているが、それ自體自己相關が高くない場合でも、少くとも一定の氣候條件のように、それが經濟システムに與えるショックは自己相關をなすと考えられる場合がある。ウォルドはヴェーネル湖 (Lake Väner) に排水す

る盆地の中の四つの都市ファルン (Falun)、カールシュタット (Karlstad)、ヴェーネルスボルク (Vänersborg)、オスロー (Oslo) の、一八六七年から一九三六年までの平均雨量及び該期間の湖の平均水量を調べて自己相關表をつくつたが、年々の雨量の相關表は全くランダム・シリーズであつたにも拘らず、湖の水準に關する相關表は高度の正の自己相關を示した。[15] このように或種の氣象學的要素の繼起はランダムであつても、そのオーバー・タイムの一般的影響は極めてシステマティクであることがある。これと同じ事が經濟現象にも云えるかも知れない。

第三に、用いられた資料の系列が、特定の分析目的に必要なものを充分正確に測定していないかも知れない。一つの變數の觀察誤差が或年に起つたならば、それは次の年にも起り、從つて大低の觀察誤差は正の自己相關をしていると信ずるに足る理由があるであろう。

かくてコフレイン及びオルカット[16]が經濟關係の計量を論じたクライン・ガーシック及びハーヴェルモー・ストーン[17]の四つの論文について檢定した所によると、誤差項の自己相關度が極めて高い。從つて、この點だけを取りあげても、今日までの單一最小自乘法の單純なる適用は極めて危險であると云わねばならないであろう。

(1) この條件のもつと完全な說明に關しては
F. N. David and J. Neyman, "Expansion of the Markoff Theorem on Least Squares", *Statistical Research Memories*, Vol. II. 1938 p.p. 105—116
を見よ。

(2) R. Frish: Statistical Confluence Analysis by Means of Complete Regression Systems, 1934.
青山敎授「フリッシュの相關理論」(「經濟變動理論の研究」第一卷所載)

(3) T. Haavlmo, "The Probability Approach in Econometrics", *Econometrica*, Supplement, July, 1944.

(4) T. Haavelmo, "Methods of Measuring the Marginal Propensity to Consume," *Journal of the American Statistical Association*, March, 1947,

三田學「經濟の計量」(統計日本社刊)参照。

(5) G. Tihtner: The Variate Difference Method, (Cowles Commision Monograph, No. 5) 1940.

(6) G. V. Yule, "Why do we Sometimes get Nonsense Correlations between Time-series etc.?" *Journal of the Royal Statistical Society*, Part I. 1926, pp. 1—26.

M. S. Bartlett, "Some Aspects of the Time-correlation Problem in regard to Tests of Significance," *Journal of the Royal Statistical Society*, Part IV, 1935, pp. 536—543

: "On the Theoretical Specification and Sampling Properties of Autocorrelated Time Series", *Journal of the Royal Statistical Society*. Part I, 1946, pp. 37—41.

G. H. Orcutt and S. F. James, "Testing the Significance of Correlation between Time Series", *Biometrica*, 1948, pp. 1—17.

D. Cochrane and G. H. Orcutt, "Application of Least Squares Regression to Relationships Containing Autocorrelated Error Terms", *Journal of the American Statistical Association*. March. 1949. pp. 32—61.

(7) A. C. Aitken, "On Least Squares and Linear Combinations of Observations", *Proceedings of Royal Society of Edinburgh*, 1934/5, pp. 42—48.

D. G. Champernowne, "Sampling Theory applied to Autoregressive Sequences", *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B. 1948.

(8) R. Frish, op. cit.

T. Koopmans, "Linear Regression Analysis of Economic Time Series", (Netherlands Economic Institute Haalem) 1937.

O. Reiersøl, "Confluence Analysis by Means of Lag Moments and Other Methods of Confluence Analysis", *Econometrica*. Jan. 1941, pp. 1—24.

G. Tintner, "Some Application of Multivariate Analysis to Economic Data", *Journal of the American Statistical Association*. Dec. 1945 pp. 472—500.

R. C. Geary, "Determination of Unbiased Linear Relations between the Systematic Parts of Variables with Errors of Observation the Varianse of which are Unknown", *Econometrica*, Jan. 1949, pp. 30—58.

(9) 一般的な説明は F. N. Darid and J. Neyman, op. cit.

(10) H. Cramer : Mathematical Methods of Statistics, 1946, pp. 548—555.

(11) A. C. Aitken; op. cit; D. Cochrane and G. H. Orcutt, op. cit,

(12) J. Tinbergen: Statitical Testing of Business-Cycle Theories. Vol II; Business Cycles in the United States of America 1919—1932, (League of Nations) 1939.

(13) G. H. Orcutt, "A Study of Autoregressive Nature of Time Series used for Tinbergen's Model of the Economic System of the United States 1919—1932", *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B. 1948. pp. 1—53.

(14) これは次のようにして知られる。もし我々が相互に關係を有しない二つの自己相關系列 x_t・y_t をもち、その最初の自己相關が

$$\frac{\mathrm{Cov}\ (x_t,\ x_{t-1})}{\mathrm{Var}\ (x)},\qquad \frac{\mathrm{Cov}\ (y_t,\ y_{t-1})}{\mathrm{Var}\ (y)}$$

であるならば、$z_t=x_t+y_t$ における最初の自己相關は

$$\frac{\mathrm{Cov}\ (x_t,\ x_{t-1})+\mathrm{Cov}\ (y_t,\ y_{t-1})}{\mathrm{Var}\ (x)+\mathrm{Var}\ (y)}$$

で與えられる、この結果は系列が幾つあつても同じように擴張することが出來る。(D. Cochrane and G. H. Orcutt, op. cit. p. 37)

(15) H. Wold: A Study in the Analysis of Stationary Time Series, 1938, pp. 171—174.

(16) D. Cochrane and G. H. Orcutt. op. cit.

(17) L. R. Klein, "The Use of Econometric Models as a Guide to Economic Policy", *Econometrica*, Apr. 1947 pp. 111—151.

: "Economic Fluctuations in the United States 1921—1941", (mimeograph)
M. A. Girshick and T. Haavelmo, "Statistical Analysis of the Demand for Food: Examples of Simultaneous Estimation of Structural Equations", *Econometrica*, Jan. 1947 pp. 79—110.
R. Stone, "The Analysis of Market Demand", *Journal of the Royal Statistical Society*, 1945. pp. 286—391.

四　最小自乘法と聯立方程式接近法

パラメーターが、聯立方程式を解くことから生ずる影響を考慮に入れる時は問題は更に複雜になる。先ず簡單な例をあげよう。

市場において價格が如何にして決定するかを説明する場合を考えよう。通常理論的には（但し部分均衡分析をとつて）、これは三つの方程式で説明される。即ち

(1)　$x^d = D(p)$

(2)　$x^s = S(p)$

(3)　$x^d = x^s$

(1)は當面の財に對して買手の夫々の價格に對する購買意欲量を示す需要方程式であり、(2)は賣手の販賣意欲量と價格との關係を示す供給方程式である。價格は需要量と供給量とが均衡する點(3)に決定する。從つてこの聯立方程式を解けば、三つの未知數x^d・x^s・pが決定するであろう。

今この理論式に誤差項を導入して、函數關係を近似的に一次式で現わし、最小自乘法によるパラメーターの計

量と、聯立方程式接近法による計量との間の優劣を論じよう。すると當面の財に對する需要方程式は次の如く書ける。

(4)　$x_t = \alpha p_t + \beta + u_t$

ここに

x_t = t時點に於ける當該財の需要量

p_t = t時點に於ける當該財の價格

u_t = 誤差項（價格以外のすべての要因から生ずる需要量に對する合成效果）

α・βはパラメーターである。更に供給函數はγ_1・δ_1をパラメーターとして

(5)　$x_t = \gamma_1 p_t + \delta_1 + v_t$

で示すことが出來る。v_tは誤差項（卽ち價格以外のすべての要因に基く合成效果）である。ここでu_t・v_tは自己相關を有せず、それらは夫々安定的な確率分布から無作爲に抽出されたものと假定する。これは通常の單一方程式による最小自乘法が前提する假說である。

さて需要方程式(4)において、x_tを獨立變數を考えよう。すると誤差項を無視すれば、x_tの同一の値に對しては、同一のp_tの値が得られる筈である。從つて今度は供給函數(5)においてp_tを獨立變數として選ぶことは不可能である。何故なら若しp_tを獨立變數にとれば、所謂"fluctuate from sample to sample"することになつて、(5)式の前提に反するからである。故に今、(4)・(5)兩式において同一の變數（例えばx_t）を獨立變數としよう。このとき、需要方程式によつて、x_tは需要關係の攪亂、卽ち買手の決意に影響を與える無數の小さい要因u_tの影響を被る。

同様にx_tは他方において、供給方程式により、賣手の決意における攪亂要素v_tの影響をうける。これは反覆標本においては、u_tとv_tの間に完全な相關關係がある時のみに起る。卽ち需要者に影響を及ぼす附加的な獨立要素は、同時に必ず供給者にも影響を與えるものでなければいけない。かくて一般にある單一方程式に新しい方程式、或いは一つのシステムに新しい方程式が附加されて我々の對象が擴張される場合には、各方程式の誤差項の相關關係が常に考慮されねばならなくなる。

さて《xのpの上への最小自乘法による回歸》を計算して、(4)式のパラメーターα及びβを推計する場合を考えよう。ここでuはあらゆるtの値に對して

(6) $E(u_t)=0 \qquad E(u_t^2)=\sigma_u^2$

なる相互に獨立な正規分布をなすものと考える。この場合、この推計の結果は決して供給函數の形に獨立であり得ないことを示そう。

先ず供給方程式(5)を考える。ここでv_tはゆあらるtの値に對して

(7) $E(v_t)=0 \qquad E(v_t^2)=\sigma_v^2$

なる獨立正規分布をなすものとしよう。更にu_tとv_tとの間の共分散(covariance)を

(8) $E(u_tv_t)=\sigma_{uv}$

で現わし、m_{xp}・m_{xx}等を以て夫々平均値の廻りの二次のモメントとする。するとxのpの上への回歸方程式は

(9) $\hat{x}=ap+b$

で現わされるであろう。ここに$\hat{x}$はxの推定値であり、

(10)　$a = \dfrac{m_{xp}}{m_{pp}}$

である。今無限のサンプルが得られるものとして(10)式はaの推定に當つて如何なることを敎えるであろうか。(4)・(5)兩式を聯立させて解いて見よう。

(11)　$x_t = \dfrac{a\delta_1 - \beta\gamma_1}{a - \gamma_1} + \dfrac{av_t - \gamma_1 u_t}{a - \gamma_1}$

(12)　$p_t = \dfrac{\delta_1 - \beta}{a - \gamma_1} + \dfrac{v_t - u_t}{a - \gamma_1}$

無限のサンプルを假定しているから、我々はm_{xp}・m_{pp}を共分散σ_{xp}及び分散σ_{pp}でおきかえることが出來る。然も(11)・(12)から

(13)　$\sigma_{xp} = \dfrac{a\sigma_v{}^2 - (a+\gamma_1)\sigma_{uv} + \gamma_1\sigma_u{}^2}{(a-\gamma_1)^2}$

(14)　$\sigma_{pp} = \dfrac{\sigma_v{}^2 - 2\sigma_{uv} + \sigma_u{}^2}{(a-\gamma_1)^2}$

を計算することが出來るから、これを(10)に代入して

(15)　$a = \dfrac{a\sigma_v{}^2 - (a+\gamma_1)\sigma_{uv} + \gamma_1\sigma_u{}^2}{\sigma_v{}^2 - 2\sigma_{uv} + \sigma_u{}^2}$

を得る。この式の値はσ及びγ_1に依存するから、一般にaに等しくないことは明かである。從つて單一方程式から得られた推定値は、aの一致推定値 (consistent estimate) たり得ないことは云うまでもない。

事實(5)が眞の供給函數であるとしたら、a 或いは β の推定値は、如何なる方法によつても決定することは不可能である。何故なら(4)・(5)を夫々適當倍して相互に加えた結果、得られた式の形は、もとの式の形に比べて全く同一だからである。例えば(4)を μ 倍、(5)を $(1-\mu)$ 倍して加算すれば

(16) $x_t = [\gamma_1 + \mu(a-\gamma_1)]p_t + [\delta_1 + \mu(\beta-\delta_1)] + \mu u_t + (1-\mu)v_t$

を得るが、これは(4)・(5)と全く同一の形の方程式である。然も殘差項

$$\mu u_t + (1-\mu)v_t$$

は、u 及び v の一般的性質をそのまま保持している。従つて μ の値を種々に變化すれば、我々は無數の方程式を得ることが出來、そのどれを(4)或いは(5)式と置きかえても立場は變らない。かくて方程式(4)を需要方程式であると斷言する根據は何處にも存しなくなる。卽ち(5)が眞の供給方程式であるならば、需要函數のパラメーターを推計する方式は全く存在しないのである。

然し、供給量が若し一期前の價格に依存し、供給方程式が

(17) $x_t = \gamma_2 p_{t-1} + \delta_2 + w_t$

なる形を有すればどうであろうか。卽ち需要方程式(4)と供給方程式(17)からなるモデルを考えよう。(4)・(17)を聯立させて解けば

(18) $p_t = \dfrac{\gamma_2}{a} p_{t-1} + \dfrac{\delta_2-\beta}{a} + \dfrac{w_t-u_t}{a}$

(19) $x_t = \gamma_2 p_{t-1} + \delta_2 + w_t$

を得る。p_{t-1}はu_tに依存しないから、我々はパラメーターγ_2・δ_2・γ_2/α・$(\delta_2-\beta)/\alpha$の推定に夫々最小自乘法を使うことが出來る。充分に大きな標本を使えば、幾らでもこの推定値を正確に算定することが出來よう。更にこの四つの推定値から、α及びβの推定値をも計算することが出來る。然しこのα及びβの値は、需要函數のみから算定したものでないことはくれぐれも注意せねばならぬ。

ここでもう一度(17)が眞の供給函數であるとして、無限標本を考え、(10)式におけるaを計算しよう。(18)・(19)より

$$(20)\quad \sigma_{xp} = \frac{\gamma_2}{\alpha} m_{pt-1,pt-1} + \frac{1}{\alpha}(\sigma_w^2 - \sigma_{uw})$$

$$(21)\quad \sigma_{pp} = \frac{\gamma_2^2}{\alpha^2} m_{pt-1,pt-1} + \frac{1}{\alpha^2}(\sigma_w^2 - 2\sigma_{uw} + \sigma_u^2)$$

が知られるから、(10)に代入して

$$(22)\quad a = \frac{\sigma_{xp}}{\sigma_{pp}} = \frac{\alpha(\gamma_2^2 m_{pt-1,pt-1} - \sigma_{uw} + \sigma_w^2)}{\gamma_2^2 m_{pt-1,pt-1} + \sigma_u^2 - 2\sigma_{uw} + \sigma_w^2}$$

を得る。これが一般にαに等しくないこと、更に(15)にも等しくないことは明かである。

上の結果から言えることは次の通りである。即ち與えられた市場に關する資料から需要函數を統計的に求めるためには、供給函數をスペシファイしなければならない。更に一般的に云えば、市場に關する資料からある經濟關係のパラメーターを測定するためには、觀察された資料を生み出した經濟システム全體を同時に考察しなければならないことである。もう一度くり返して、上述の過程を總括するに、我々の目的は需要函數のパラメーター

を測定するにあつた。先ず無限の標本を取扱うことにより、標本抽出に基く變動を捨象した。そこで二つの供給函數を考えて、夫々 a の異つた推計値を得た。ここで統計方法をきめるためには、方程式のシステム全體を考慮に入れなければならないと結論した。

更に又、如何なる方法によつても求めるパラメーターを推計することの出來ない場合のあることも見た。我々は第五章において、アイデンティフィケイション・プロブレム (Identification Problem) の題目の下に、もう一度この問題にたちかえるであろう。

では一般に如何なる計算手續によつて聯立方程式のすべてのパラメーターを計算するかが次の問題であるが[1]、ここでは紙面の都合でたち入らない。然し、その一般的な場合を統計數學プロパーの問題として、第六章に展開することにする。

(1) 經濟現象におけるかかる聯立方程式近接法、並びにその計算過程に關する文獻の主なるものに右記がある。

T. Haavelmo, "The Probability Approach in Econometrics", *Econometrica*, 1944 (Supplement)

T. Koopmans, "Statistical Estimation of Simultaneous Economic Relations", *Journal of the American Statistical Association* Dec. 1945, pp. 448—466.

M. A. Girshick and Trigve Haavelmo", Statistical Analysis of the Demand for Food: Examples of Simultaneous Equation of Structural Equations", *Econometrica*, Apr. 1947.

T. Haavelmo, "The Statistical Implication of a System of Simultaneous Equations", *Econometrica*, Jan. 1943.

G. Cooper, "The Role of Econometric Models in Economic Research", *Journal of Farm Economics*, Feb. 1948.

J. Marschack and W. H. Andrews, "Random Simultaneous Equations and the theory of Production", *Econometrica*. July-Oct. 1944.

M. S. Bartlett, "A Note on the Stochastic Estimation of Demand and Supply relations from Time Series", *Econometrica*, July. 1948.

尙上記誤差項の自己相關と、聯立方程式接近法とを同時に考慮したものに

G. H. Orcutt and D. Cochrane, "A Sampling Study of the Merits of the Auto-regressive and Reduced Form Transformation in Regression Analysis", *Journal of the American Statistical Association*, Sep. 1949.

がある。

五　アイデンティフィケイション・プロブレム (Identification Problem)

本章に入るに先だつて、經濟系を說明する構造方程式 (structural equations) 組織が如何なる種類のものから構成されるかを考察しておこう。通常それは四種に分たれる。その一は經濟行爲式とも呼ばるべきもので、經濟的な決意の動機を直觀・經驗其の他一般的な觀察の結果から分析して、知り得た經濟行爲の原則を示している。第二は制度的法則を說明するもので、稅法・價格統制・支拂準備等々、個人の行爲を制限する法的或いは制度的な規則を說明するものである。第三は生產の技術的條件を示すものであり、第四は變數の間に設定された恒等式である。これらの構造方程式組織は云うまでもなく經濟理論の敎えるところに基いて作られるが、また一定の期間體系的に集められた適當な變數に關する統計資料を、理論と結びつけることによつて決定する場合もある。本章ではこの後の場合にまつわる若干の問題をとりあげる。

統計資料が方程式組織を決定する礎石として用いられる場合には、近代的な統計理論に基く推論が欠くべから

ざる手段であることは云うまでもない。然し乍ら、他方において經濟理論をもたなければ、かかる統計的手段を直接に經濟行爲式に適用しても無意味である。經濟理論の伴わない統計的推論は、ただ如何なる規則性或いは安定的關係が資料の中に認められるかを知る場合に限る。たとえこのようにして、純粋に經驗的な關係が認められても、この構造關係が如何なる形のものであり、如何なる變數が含まれ、それ以上に何が言えるかを知るためには、矢張り理論にまたなければならない。このように統計的推論の適用には限界があることを指摘して、本章での問題に入ろう。

手始めに、今まで屢々用いた簡單な例を考える。ある財に對する競爭市場を考え、その財の價格及び數量は、需要表及び供給表を示す二つの直接の交點によつて決定するものとする。卽ち我々は今、充分に大きな觀察資料から、次の構造方程式のパラメーターを推計するとしよう。

$$(1)\begin{cases} (1d) \quad q+\alpha p+\varepsilon=u & \text{(需要)} \\ (1s) \quad q+\gamma p+\eta=v & \text{(供給)} \end{cases}$$

ここにギリシヤ文字は求むるパラメーターであり、誤差項 u・v に關しては、前と同樣にそれらは安定的同時確率分布 (stable joint probability distribution) から無作爲に抽出された値であり、

$$E(u)=0, \quad E(v)=0, \quad \varphi(u,v)$$

と假定する。

さてこの場合、(1)の形では眞の供給函數も或いは眞の需要函數も決定することが出來ないことは、前章でものべた所であつた。卽ち (1d), (1s) の各々を夫々適當倍して加算すれば、我々は(1)と全く同じ形式の方程式を得る

ことが出來、それが眞の方程式(1)から導出されたものである限り、(1)を滿足するあらゆる資料を滿足することは疑をいれないからである。

第二の例として、供給函數にある外生的變數——例えば農業生産における雨量rの如き——が付加された場合を考えよう。すると我々のモデルは

$$(2)\begin{cases}(2d) & q+\alpha p \qquad\quad +\varepsilon=u \quad (\text{需要})\\ (2s) & q+\gamma p+\delta r+\eta=v \quad (\text{供給})\end{cases}$$

となる。誤差項は勿論、rの値に關して統計的に獨立であるとする。この場合でも、供給方程式は如何なる大きさのサンプルを用いようと決定することは出來ない。例えば眞の構造方程式の夫々に$-\frac{1}{2}$・$\frac{1}{3}$をかけて加算すれば

$$(2's)\quad q+\frac{3\gamma-\alpha}{2}p+\frac{3\delta}{2}r+\frac{3\eta-\varepsilon}{2}=v'$$

を得るが、これは(2s)と全く同じ形であり、從つて(2)を滿足する資料は同時に(2's)をも滿足するからである。然し今度は、一般に需要方程式の係數α・εは確定することが出來るが、それには雨量rが必ず供給方程式に函數關係をもつことと證するに足るだけの理論的根據をもたねばならない。

更に第三に、今度は需要方程式にも外生的變數——例えば所得i（嚴密に云えば、價格pも數量qも所得iから影響をうけ、從つてiは寧ろ内生的變數であろうが、ここでは説明の便宜上一應外生的變數と考える）——とり入れて見よう。すると構造方程式として

$$
(3)\quad \begin{cases} (3d) & q + \alpha p + \beta r \qquad\quad + \varepsilon = u & \text{(需要)} \\ (3s) & q + \gamma p \qquad\quad + \delta r + \eta = v & \text{(供給)} \end{cases}
$$

を得る。この場合、β 及び δ が共に零でない限り、我々はこの兩式の如何なる一次結合によつても、原式に代るべき（同一形式の）式をもち得ない。卽ち資料が充分に大きければ、兩方程式のパラメーターをそれから決定することが出來るであろう。然しここでも、(3)の形の構造方程式が實際に妥當するとの理論的根據をもたねばならぬことは云うまでもない。

最後に需要方程式に前期の所得 i_{-1} を導入し、供給方程式を（1s）の形に戻して次のモデルを考えよう。

$$
(4)\quad \begin{cases} (4d) & q + \alpha p + \beta_0 i_0 + \beta_{-1} i_{-1} + \varepsilon = u & \text{(需要)} \\ (4s) & q + \gamma p \qquad\qquad\qquad\quad + \eta = v & \text{(供給)} \end{cases}
$$

このときは明かにパラメーター α・ε を決定し得ない。何故なら(4)の兩式の一次結合は（4d）と全く同じ形を有するからである。然し比 β_{-1}/β_0 は眞の需要方程式に比べて、如何なる一次結合によつても變化することがないから、現在の所得と過去の所得とどちらが需要量に對して强い影響をもつかは知ることが出來る。だが需要に對する價格の彈力性については何も云い得ないであろう。

さて、この四つの例から見たように、我々は資料から構造方程式のパラメーターを推計することが出來るためにはモデルに對して何らかの制限を付けねばならないように思われる。勿論モデルは理論的に充分根據があるものでなければならないが、それ以上にこの統計的推測を可能ならしめるために要求される束縛條件は何であろうか。これが本章での課題である。

上述の議論で我々は、觀察標本の抽出に伴う變動をさけるために、パラメーターは充分大きな觀察資料から決定されるものと假定して來た。以下この前提を、我々は觀察値の確率分布に對する一定の假說的な知識によつておきかえるものとする。勿論かかる確率分布に對する正確なる知識は、無限の觀察をなすのでなければひき出すことは出來ない。然しながらこのような假說的な知識を有效に使うことによつて、我々は有限標本の變動に伴う統計的推論の問題と、無限の觀察によつても起り得べき、モデルに對する制限の問題とを明瞭に區別して論ずることが出來るであろう。

ところで、ある一組の外生的變數の特定値に對して誤差項の分布法則は、構造方程式を通じて內生的變數の條件付確率分布を敎えるわけであるが、これらの分布は逆に外生的變數のあらゆる特定値の函數と見なされ、我々の以下の議論に對してもそれが前提される。もし一組の外生的變數のとるあらゆる値に對して、二つの構造式A・A'の內生的變數の條件付分布が常に同一であるならば、A・A'はエキヴァレント (equivalent) であると言う。また構造式Aが、モデルの中に、他にエキヴァレントな式A'をもたないならば、Aはアイデンティファイされている (to be identifiable; to be identified) と云う。從つて前例(3)の兩式は$\beta=0$, $\delta=0$なるときを除いて、アイデンティファイされている。然し第一例（或いは第二例の(2s)と(2′s)の如き）は、エキヴァレントな式をつくることが出來るから、アイデンティファイされているとは云い得ない。

このように定義するならば、我々の求むる束縛條件は、アイデンティファイされるための條件と云うことが出來る。既に見たように、構造方程式の若干（或いはすべて）を一次結合することによつて、全く同じ形の方程式をうることが出來るならば、それらの方程式はアイデンティファイされていない。然らば逆に、如何なる一次結合

も問題の方程式とエキヴァレントな方程式を作ることが出來なかつたら、その方程式はアイデンティファイされていると云うことが出來るだろうか。即ち、一次結合以外にそれと同じ形の方程式を引き出す方法はないであろうか。

簡單な考察から知れるように、我々假說が前提される限り決してこのような方法はあり得ない。從つて一次結合によるエキヴァレントな方程式の導出が不可能であるならば、我々の構造式は常にアイデンファイされていると云うことが出來る。そしてそのための必要條件は次の如くである。（證明略[2]）

モデルに含まれているすべての變數の中、當該方程式には含まれていないものの數が、總構造方程式數（Gとする）より少くとも一つ少い。

これをアイデンティファイされるための次數條件（order condition）という。またその必要且つ充分なる條件は

當該方程式から除外された變數が、他の$G-1$個の構造方程式においてもつ係數を適當に整理して得た$G-1$次の行列式が、少くとも一つは零でない。

これをアイデンティファイされるための階數條件（rank condition）と云う。前例について云えば、構造方程式の數は$G=2$である。從つて少くとも$G-1=1$箇の變數が當該方程式から除かれておれば、その式はアイデンティファイされる可能性をもつ。そして少くともそうして除かれた變數の一つが、他の方程式において零でない係數をもつならば――一次の行列式はそれがもつ要素そのものに等しい――、事實アイデンティファイされている。例えば(2d)には變數rが含まれていないが、それが(2s)において零でない係數δを伴う限り(2d)の他のパラメーターを確定することが出來る。

戰時中、エツェキールとクラインの間に、投資表の統計的導出について活氣ある論爭が行われたが[3]、少くともその一部はアイデンティフィケイションの問題に關するものであつた。卽ち最も素朴なケインズ理論のモデル化を考えて、ノテイションを

$$
(5)\quad \left\{\begin{array}{ll}
S = \text{貯蓄} & \\
I = \text{投資} & \\
Y = \text{所得} & \\
Y_{-1} = \text{前期の所得} & \text{(何れも貨幣額)}
\end{array}\right.
$$

と定め、

$$
(6)\quad \left\{\begin{array}{lll}
(6.1) & S-I = 0 & \text{(恒等式)} \\
(6.S) & S - \alpha_1 Y - \alpha_2 Y_{-1} - \alpha_0 = u & \text{(貯蓄表)} \\
(6.I) & I - \beta_1 Y - \beta_2 Y_{-1} - \beta_0 = v & \text{(投資表)}
\end{array}\right.
$$

とすれば、二つの所得Y・Y_{-1}に相關する同一の資料から、消費者及び企業者の貯蓄表・投資表を決定し得ない。これは、少くとも $G-1=2$ 個の變數が (6.S) (6.I) から除かれて居らねばならぬと云う我々のアイデンティフィケイションの基準に反するためであることは云うまでもない。

これに對してエツェキールは總投資Iを更にその性質によつて細分し、モデルを精密化するよう提起した。卽ち

$$
(7)\quad \begin{cases} I_1 = \text{設備，機械に對する投資} \\ I_2 = \text{住宅に對する投資} \\ I_3 = \text{消費者のクレジットや企業のストックの變化に伴う一時的投資} \\ I_4 = \text{輸出超過，政府の赤字財政等の準投資} \end{cases}
$$

とし、更に

$$
(8)\quad \begin{cases} H = \text{住宅投資の中半獨立的な循環的性質をもつもの} \\ E = \text{準投資の中外生的性質をもつもの} \end{cases}
$$

の二變數を追加して、時間要素 (trend term) をも加味した。今トレンド・タームを無視すれば、クープマンスに從つて、彼のモデルは次のようになる。

$$
(9)\quad \begin{cases}
(9.1)\quad S-I_1-I_2-I_2-I_4 \qquad\qquad = 0 & \text{(恒等式)} \\
(9.S)\quad S \qquad -\alpha_1 Y-\alpha_2 Y_{-1} \qquad -\alpha_0 = u & \text{(貯蓄表)} \\
(9.I_1)\quad I_1 \qquad -\beta_1 Y-\beta_2 Y_{-1} \qquad -\beta_0 = v_1 & \text{(設備投資表)} \\
(9.I_2)\quad I_2 \qquad -\gamma_1 Y-\gamma_2 Y_{-1}-H \qquad -\gamma_0 = v_2 & \text{(住宅投資表)} \\
(9.I_3)\quad I_3 \qquad -\delta_1 Y-\delta_2 Y_{-1} \qquad -\delta_0 = v_3 & \text{(一時的投資表)} \\
(9.I_4)\quad I_4-\varepsilon_1 Y-\varepsilon_2 Y_{-1} \qquad -E-\varepsilon_0 = v_4 & \text{(準投資表)}
\end{cases}
$$

H 及び E の變數の性質について尚論議の餘地はあるけれども、それをさておけば、どの方程式についても（恒等式を除く）、除かれた變數の數は少くとも $G-1=5$ である。更に階數條件を (13.S) について見るならば、先ず除外された變數が（他の構造方程式において）つくる係數のマトリックスを見れば

$$
(10)\quad
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} (I_1) & (I_2) & (I_3) & (I_4) & (H) & (E) \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccccc}
-1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1
\end{array}\right)
\end{array}
$$

となるが、ここから五次の行列式を作る作り方は ${}_6P_5=720$ 通りもある。然し例えば

$$
(11)\quad
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} (I_1) & (I_2) & (I_3) & (H) & (E) \end{array} \\
\left|\begin{array}{ccccc}
-1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1
\end{array}\right|
\end{array}
=-1
$$

で零でないから、(13.S) はアイデンティファイされていると云うことが出來る。同様に他の方程式についても檢定することが出來る。

このようにして、(9)の各方程式のパラメーターは、資料から適當な推計法によつて決定することが出來ることを確かめたが、ここで注意しなければならないのは、この檢定法はモデルそのものの正否は教えないと云うことである。云いかえれば、與えられたモデルが經濟系の説明に適合しているか否かは主として經濟理論が教える所

であり、それが云えなければアイデンティフィケイションの是非を論じても全く無駄であると云わねばならない。本章の始めにものべたように、經濟の構造關係に如何なる變數が含まれ、それが如何なる形をなすかはこの統計的推論とは全く別問題であることは、くりかえし强調されてよいであろう。

(1) 本章の敍述は主として
T. Koopmans, "Identification Problem in Economic Model Construction", *Econometrica*, Apr. 1949. pp. 125—143. に從う。

(2) この證明及び本問題に對する更に一般的な論述に關しては
T. Koopmans and O. Reiersøl, "The Identification of Structural Characteristics", *The Annals of Mathematical Statistics*, June 1950, pp. 165-181

(3) M. Ezekiel, "Saving, Consumption and Investment", *American Economic Review*, June. 1942 pp. 272—307.
: "The Statistical Determination of the Investment Schedule", *Econometrica*, Jan. 1944, pp. 89—90.
L. Klein, "Pitfalls in the Statistical Determination of the Investment Schedule". *Econometrica*, July-Oct. 1943, pp. 246—258. : "The Statistical Determination of the Investment Schedule: A Reply", *Econometrica*, Jan. 1944. pp. 91—92.

六　ストカスティック・イクエイション (Stochastic Equation) 組織における或る單一方程式のパラメーターの推計について

Ⅰ　聯立一次方程式によるある體系の構造分析
Ⅱ　構造方程式體系におけるある單一方程式
Ⅲ　パラメーター推計過程の説明
Ⅳ　最尤推定値 (Maximum likelihood estimate) の算定

V　束縛條件の尤度檢定 (Likelihood ratio test)

VI　小標本理論に基く信賴區間 (Confidence regions)

さて、今まで色々な見地から、從來の單一方程式によるパラメーターの測定法が極めて不備なものであることを指摘した。卽ち誤差項がもつ自己相關の問題はさて措いても、經濟變數は相互に依存し合うものであり、經濟構造を示すある方程式のパラメーターの決定には、かかる相互依存のシステム全體を說明する聯立（確率函數）方程式を考察しなければならない。然もこのような要請は、單に經濟關係の計量におけるばかりではなく、天文學・氣象學・生物學等の多くの分野においても提起され、今やこの問題は近代統計學界の論議の焦點の一つになつているかのように思われる。[1] 本章ではそれがための理論を、統計數學プロパーの觀點から展開する。[2]

(1) 天文學において、ある遊星の軌道を決定するのに從來は夫々の時點におけるその天體の位置、速度、方向、光度等が判斷の基準とされ、單一方程式接近法が用いられたのであるが、最近は引力の均衡關係を現わす聯立方程式組織から決定されるようになつていると聞く。

(2) 數學理論プロパーの觀點から、この問題をとり扱つたものに

T. W. Anderson and H. Rubin, "Estimation of the Parameters of a Single Equation in a Complete System of Stochastic Equations", *The Annals of Mathematical Statistics*, March 1949.

P. S. Dwyer, "Evaluation of Linear Forms", *Psychometrica*, Vol. 6. 1941, pp. 355—355.

H. B. Mann and A. Wald, "On the Statistical Treatment of Linear Stochastic Difference Equations", *Econometrica*, Apr. 1943,

T. W. Anderson and H. Rubin, "The Asymptotic Properties of Estimates of the Parameters of a Single Equation in a Complete System of Stochastic Equations", *The Annals of Mathematical Statistics*, March, 1950.

尚近刊の
Cowless Comission Monograph No. 10 "Statistical Inference in Dynamic Economic Models" 1950
は、この問題に關する綜合研究だと云われる。本章の敍述は主として冒頭のアンダーソン及びラビンの論文に從つた。

I 聯立一次方程式によるある體系の構造分析

經濟學・生物學・氣象學等の多くの研究分野においては、ある變量の觀察値の繼起を、第一次接近として一組のストカスティック・イクエイション (Stochastic equation) で示された確率模型で把握することが出來る。今ある時點 t において觀察された諸量を、ヴェクトル y_t であらわす。これらの諸量は t 時點において先決的に決定された諸量——即ち誤差なしに測定出來る變量——たるヴェクトル z_t に同時依存 (jointly dependent) している。z_t の座標の中のあるものは、y_{t-1}, y_{t-2} 等の座標であり、他のものは常數量である。ヴェクトル y_t ($t=1,2,\cdots\cdots,T$) の變量は內生的 (endogenous) ——即ちその體系の內部で決定される——變數といい、z_t の中の時間的ずれを伴わない——從つて固定變量と考えられている——變量は、外生的 (exogenous) 變數と呼ばれる。動態經濟學のモデルにおいては、內生的變數とは投資量・利子率・消費量等々であり、外生的變數とは經濟システムの外部で決定される諸量、即ち雨量・政府消費量・時間等々である。

さて、確率模型の最も簡單なものは、これらの諸變數が近似的にある一次方程式組織を滿足するものとして作ることが出來る。今、モデルが

(1・1) $B_{yy}y'_t + \Gamma_{yz}z'_t = \varepsilon'_t$

で示されたとする。ここに ε_t' は期望値が零なる確率分布をもつヴェクトルであり、B_{yy} 及び Γ_{yz} は夫々マトリックスである。特に B_{yy} はナン・シンギュラー (non-singular) 卽ちその行列式は零でないとする。ダッシュは夫々のヴェクトル及びマトリックスを、轉置したものを示している。もし全部でG箇の同時依存變數があるならば、(1・1) はG箇の方程式から構成される。卽ち、體系を決定する變數の數と方程式の數とは相等しい。y_t 及び z_t が正確に一次方程式を滿足せず常に誤差を生ずるために、我々の一次形式も零ではなく、偶然要素(random element; disturbance) に等しいとおく。一般に (1・1) を構成する各方程式は體系の構造を説明するから、構造方程式 (structural equations) と呼ばれる。例えば消費量・價格・國民所得の大いさ等の變數を結ぶ方程式は消費者の經濟行爲を説明するであろうし、利子率を含む他の方程式は投資者の行爲を説明していると云うが如きである。

今までも見たように、マトリックス B_{yy}, Γ_{yz} 及び偶然要素の (假定された) 分布の特性を示すパラメーターを推計するのに、通常の回歸法 (regression methods) をそのままでは使用し得ない。從つて以下この構造方程式體系を同時に考察し、ε_t' が同時正規分布 (jointly normal distribution) をなすとの假説の下に、すべてのパラメーターを最尤推定法 (maximum-likelihood-estimate method) によつて推計することを考えよう。

假説によつて B_{yy} はナン・シンギュラーであるから、(1・1) を次のように變形することが出來る。(このように變形した形を誘導形 (reduced form) と云う。)

$$(1\cdot2)\quad y_t' = -B_{yy}^{-1}\Gamma_{yz}z_t' + B_{yy}^{-1}\varepsilon_t'$$

從つて

$$(1\cdot3)\quad y_t' = \Pi_{yz}z_t' + v_t'$$

但しここに

$$(1\cdot4)\quad \Pi_{yz} = -B_{yy}^{-1}\Gamma_{yz}$$

$$(1\cdot5)\quad \eta_t = B_{yy}^{-1}\varepsilon_t$$

である。ε_t が正規分布をなすならば、その再現性によつて η_t も亦正規分布をなす。從つて一定の時點において、我々はモデルを條件付期望値 (conditional expected value) $z_t\Pi'_{yz}$ をもつ y_t の分布の特徴づけ (specification) と考えることが出來る。

ここで (1·1) の左邊にナン・シンギュラー・マトリックスをかけても、y_t に關して同一の分布を決定する方程式組織を得ることとは明かである。また逆に、方程式組織の一次性を保つためには、$(B_{yy}\Gamma_{yz})$ の轉置マトリックスのみが、(1·1) に對するナン・シンギュラー・マトリックスたる乘數であることが分る。もし $(B_{yy}\Gamma_{yz})_r$ に何らかの制限があるならば、これらの制限を滿足する新しい係數のマトリックスの組は相應的に減少する。もし許されるマトリックス乘數の組がただ對角マトリックス (diagonal matrix) のみであるならば、かかる構造方程式の體系はアイデンティファイされている (to be identified) と云う。この場合は、すべての係數に對して與えられた常數による掛算だけが可能である。

一定の z_t の下における y_t の分布に關する知識は、明かに (1·3) における Π_{yz} 及び η_t の分布に關する知識とエキヴァレントである。若しシステムがアイデンティファイされているならば B_{yy} 及び

$$(1\cdot6)\quad \Gamma_{yz} = -B_{yy}\Pi_{yz}$$

は、左邊に對する對角マトリックスによる掛算を除いてユニークリイに決定される。從つてシステムのアイデン

ティフィケイションの問題は、分布に關する知識から構造方程式の係數を推測することが出來るかどうかと云う事實を判斷する基準を與えるものである。然しここでは簡單のために、B_{yy}, 及び Γ_{yz} のすべての係數を推定する問題はさておき、システムの中のある單一方程式の係數を推測する場合に議論を限ることにする。

II　構造方程式體系におけるある單一方程式

多くの研究にとつては、構造體系のあらゆるパラメーターではなく、その中の單一方程式、例えば

(2・1)　$\beta_{y}y_{t} + \gamma_{z}z_{t} = \zeta_{t}$

に關する知識のみが問題になることが多い。本章でもそれを取り上げることにする。(2・1) において ζ_{t} はスカラー量である。全體系の中からある單一方程式のパラメーターの推計の問題を論ずるには、その他の方程式に關して最小の制限的假說の下に論ずることが望ましい。然し少くとも問題の單一方程式を取扱うには、その方程式がアイデンティファイされていることが必要である。卽ち (β_{y}, γ_{z}) の常數倍を除いては、$(B_{yy}\Gamma_{yz})$ の行の如何なる一次結合もそれを滿足し得ないようなある制限を付さなければならない。然しこの場合は、あらゆる構造方程式がアイデンティファイされていることを假定しなくとも、當面の單一方程式のみについてそれが假定されれば充分である。

今、設定すべき制限を、ある係數が零であると云う事で示そう。從つて我々は

(2・2)　$(\beta_{y}, \gamma_{z}) = (\beta, 0, \gamma, 0)$

の形に、ヴェクトル要素を整理することが出來る。ここに

$$(2\cdot3)\quad \beta = (\beta^1, \cdots\cdots, \beta^H)$$

はH個の零でない係數をもつて居り、

$$(2\cdot4)\quad \gamma = (\gamma^1, \cdots\cdots, \gamma^F)$$

はF個の零でない係數をもつている。

さて、y_tを構成するG個の要素を、(2·1) に零でない係數となつて含まれるかどうかに從つて、夫々H個及び$(G-H)$個の二つの群に分けるのが便利である。同様に、z_tを構成するK個の要素も、同一の基準に從つて、F個及びD個に分つことが出來る。そこで

$$(2\cdot5)\quad y_t = (x_t, \gamma_t)$$

$$(2\cdot6)\quad z_t = (u_t, v_t)$$

とし、ここで

$$(2\cdot7)\quad x_t = (x_{t1}, \cdots\cdots, x_{tH})$$

$$(2\cdot8)\quad \gamma_t = (\gamma_{t1}, \cdots\cdots, \gamma_{t,G-H})$$

$$(2\cdot9)\quad u_t = (u_{t1}, \cdots\cdots, u_{tF})$$

$$(2\cdot10)\quad v_t = (u_{t1}, \cdots\cdots, v_{tD})$$

とすることが出來る。從つて問題の單一方程式は

$$(2\cdot11)\quad \beta x_t' + \gamma u_t' = \zeta_t$$

となる。

次にこの方程式が如何にしてアイデンティファイされるかを見よう。Π_{yz} をH箇及び（$G-H$）箇の行、F箇及びD箇の列に分つて

$$\Pi_{yz}=\begin{pmatrix}\Pi^*_{xu} & \Pi_{xv}\\ \Pi_{yu} & \Pi_{yv}\end{pmatrix}$$

とすれば、誘導形(1・3)を次のように書くことが出來る。即ち

$$(2\cdot12)\quad x'_t=\Pi^*_{xu}u'_t+\Pi_{xv}v'_t+\delta'_t$$

$$(2\cdot13)\quad y'_t=\Pi_{yu}u'_t+\Pi_{yv}v'_t+\xi'_t$$

ここに

$$\eta_t=(\delta_t,\xi_t)$$

である。上の方程式に（β, 0）をかければ

$$(2\cdot14)\quad \beta x'_t=\beta\Pi^*_{xu}u'_t+\beta\Pi_{xv}v'_t+\beta\delta'_t$$

を得る。これと(2・11)との間にはアイデンティフィケイションが保持されねばならないから

$$(2\cdot15)\quad \gamma=-\beta^*\Pi_{xu}$$

$$(2\cdot16)\quad 0=-\beta\Pi_{xv}$$

である。マトリックスΠ^*_{xu}, Π_{xu} は與えられたu_t及び v_t（少くとも $K=D+F$ 個の一次獨立なu_t・v_tの組）の下での、x_tの分布によつて決定される。方程式(2・11)は、(2・15)(2・16)を解いて得たβ及びγの値が、比例常數を

除いてユニークリイに決定されるならば（そしてまたその時にのみ）、アイデンティファイされる。これがためには Π_{xv} の階數 (rank) が $H-1$ でなければならない。かくて(2・11)がアイデンティファイされるための必要且つ充分なる條件は、x_t の v_t の上への階數が $H-1$ なることである。特にこれは v_t の座標の數（γ_z における零係數の數）が少くとも $H-1$ 個あることを意味する。この條件は、問題の單一方程式において、その係數が零であるところの B_{yy} の $G-H$ 個の列及び Γ_{yz} の D 個の列によつて構成されたマトリックスの階數が $(G-1)$ であると云う事實に等しいことは、見易い事實である。[1]

さてヴェクトル ε_t は平均値零の正規分布をなすから、η_t も亦平均値零の正規分布をなす。今 δ_t の共變マトリックス (covariance matrix) を Ω_{xx} とおく。從つて $\zeta_t=\beta\delta_t'$ の分散 (variance) は

$$(2\cdot17)\quad \sigma^2=\beta\Omega_{xx}\beta'$$

である。β に於ける比例常數は ζ_t の分散を

$$\sigma^2=1$$

とおくことによつて決定される。また β の第 i 番目の座標を β^i とすれば

$$(2\cdot18)\quad \beta^i=1$$

として正規化出來る。一般にノーマリゼイション (normalization) の問題を

$$(2\cdot19)\quad \beta\Phi_{xx}\beta'=1$$

で示すことが出來る。ここに Φ_{xx} は既知の常數、又は未知のパラメーターに關する既知の函數である。

M・A・ガーシックは $D=H-1$ なる條件の下に β 及び γ を推計するのに、(Π^*_{xu}, Π_{xv}) を u 及び v の上への x

の標本回歸 (P^*_{xu} P_{xv}) でおきかえることによつて、(3·15) (3·16) を解いたと云われるが、まだ見る機會を得ない。なおこれと同じ着想は、O・ライアゾールにも見られる。[2]

ここでは $D \geqq H$ の場合を取扱おう。この場合 P_{xv} の階數は通常 H であり、このままでは適當な β の推計が得られない。以下に提起する方法は、一般にディスクリミナントプロブレム (discriminant problem) と云う問題に用いられる接近法である。

(1) この關係はクープマンス及びラビンによつて與えられた。この問題に對する一般的な説明は、前章及び T. Koopmans and O. Reiersøl "The Identification of Structural Characterics" *The Annals of Mathematical Statistics,* June 1950 を見よ。

(2) O. Reiersøl, "Confluence Analysis by Means of lag Moments and Other Methods of Confluence Analysis", *Econometrica,* Jan. 1941.

III　パラメーター推計過程の説明

一般に内生的變數 x_t の外生的變數・或いは先決的變數 u_t 及び v_t への依存は、x_t の u_t、v_t に對する回歸係數のマトリックス (Π^*_{xu}, Π_{xv}) によつて與えられる。問題の單一方程式においては x_t の座標は v_t とは關係を有しないから

(3·1)　$\beta\Pi_{xv} = 0$

今、T 組の觀察値 $(x_1, z_1), (x_2, z_2), \ldots\ldots, (x_T, z_T)$ の標本から β 及び γ を推計するとしよう。我々が必要とする知

識は二次のモメント・マトリックス (moment matrix) に纏めることが出來る。

$$(3\cdot2)\quad M_{xx}=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}x_t'\,x_t$$

$$(3\cdot3)\quad M_{xz}=(M_{xu}\ \ M_{xv})$$

$$=\frac{1}{T}\left(\sum_{t=1}^{T}x_t'\,u_t\ \ \sum_{t=1}^{T}x_t'\,v_t\right)$$

$$(3\cdot4)\quad M_{zz}=\begin{pmatrix}M_{uu} & M_{uv}\\ M_{vu} & M_{vv}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{T}\begin{pmatrix}\sum_{t=1}^{T}u_t'u_t & \sum_{t=1}^{T}u_t'v_t\\ \sum_{t=1}^{T}v_t'u_t & \sum_{t=1}^{T}v_t'v_t\end{pmatrix}$$

u_tのある一つの座標を單位とすることが出來るから、これらのモメントを平均値の周りにとつても益がない。ここでv_tの代りにu_tに直交するv_tの部分ヴェクトルを用いるのが便利である。即ち

$$(3\cdot5)\quad s_t'=v_t'-M_{vu}\,M_{uu}^{-1}\,u_t'$$

を用いよう。するとモメントは M_{xx}, M_{xu}, M_{uu} 及び

$$(3\cdot6)\quad M_{xs}=M_{xv}-M_{xu}\,M_{uu}^{-1}\,M_{uv}$$

$$(3\cdot7)\quad M_{ss}=M_{vv}-M_{vu}\,M_{uu}^{-1}\,M_{uv}$$

となる。從つて誘導形を

$$(3\cdot8)\quad x'_t = \Pi_{xu}\, u'_t + \Pi_{xs}\, s'_t + \delta'_t$$

とすることが出來る。ここに

$$(3\cdot9)\quad \Pi_{xu} = \Pi^*_{xu} + \Pi_{xv}\, M_{vu}\, M^{-1}_{uu}$$

$$\Pi_{xs} = \Pi_{xv}$$

である。Π_{xs} の推定値は x の s の上への回歸であるから

$$(3\cdot10)\quad P_{xs} = M_{xs}\, M^{-1}_{ss}$$

βを推定するには，殘差

$$(3\cdot11)\quad W_{xx} = M_{xx} - P_{xs}\, M_{ss}\, P'_{xs} - P_{xu}\, M_{uu}\, P'_{xu}$$

(但しここに

$$(3\cdot12)\quad P_{xu} = M_{xu}\, M^{-1}_{uu}$$

である）のモメント・マトリックスによつて決定されるマトリックスの中の βP_{xs} を最小にするようにβをきめればよい。これは最小自乘法にとられる考え方の一般化であり，最小の分散をもつ要素の決定に重點がおかれる。この推定値は

$$(3\cdot13)\quad (P_{xs}\, M'_{ss} - \nu\, W_{xx})\, b' = 0$$

を滿足するヴェクトルである。但し

$$(3\cdot14)\quad |P_{xs}\, M_{ss}\, P'_{xs} - \nu\, W_{xx}| = 0$$

の最小根をとるものとする。これはノーマライズされてγの推定値は $-bP_{xu}$ となる。

次に次節において、我々は一定の假說のもとに、これらの推定値を最尤法 (method of maximum likelihood) によつて求める。偶然要素 (disturbance) はこの推定にあたつて正規分布をなすと假定せられるけれども、推定値は一層一般的な立場において用いることも出來る。これはフィッシャーが展開した[1]ディスクリミナント・ファンクション・セオリーの擴充であり、與えられたディメンジョナリティの平均値のマトリックスを推定する特殊理論であると云うことが出來る。

(2) R. A. Fisher, "The statistical utilization of multiple measurement", *Annals of Eugenics*, 1938. pp. 376—386.

IV　最尤推定値 (Maximum likelihood estimate) の算定

我々は次の假說の下に β、γ 及び σ^2 の推定値を導出する。

〔假說 一〕問題の單一方程式

$$\beta x_t' + \gamma u_t' = \zeta_t \qquad (2{\cdot}11)$$

は G 個のストカスティック・イクエイション (stochastic equation) の一次式體系からなる構造方程式システムの一つである。この方程式は H を x_t の座標の數とした場合、少くとも v_t に $(H-1)$ 個の座標があるならば、アイデンティファイされている。ここに v_t は (2·11) にはないけれども、システム全體の中には含まれている先決變數 (predetermined variables) のヴェクトルである。

〔假說二〕與えられた時點 t において

$$z_t = (u_t, z_t)$$

のあらゆる座標が與えられる。

〔假說三〕z_t の座標は外生的變數 (exogenous variables) 及び $y_{t-1}, y_{t-2}, \cdots\cdots$ の座標の與えられた函數である。若し $y_0, y_{-1}, \cdots\cdots$ の座標が z_t に含まれるならば、それらは一定の數と考えられる。M_{zz} のモメント・マトリックス (moment matrix) はナン・シンギュラー (nonsingular) とする。

〔假說四〕偶然要素のヴェクトル δ_t は系列相關がない (serially independent) ものとし、平均値零、共變マトリックス (covariance matrix) Ω_{xx} の正規分布をしている。

さて、Φ_{xx} が他のパラメーターの函數である場合のノーマリゼーション (2·19) を考えよう。但し

$$(4\cdot1)\qquad \frac{\partial \Phi_{xx}}{\partial \beta} = 0$$

である。我々はその結果を次の定理で述べることが出來る。

〔定理一〕假說一、二、三、四の下における β の最尤推定値 (maximum likelihood estimate) は

$$(4\cdot2)\qquad \hat{\beta} = b \Big/ \sqrt{b\hat{\Phi}_{xx}\, b'}$$

である。但しここで b は

$$(3\cdot13)\qquad (P_{xs} M_{ss} P'_{xs} - \nu\, W_{xx})\, b' = 0$$

の ν の最小値に相應する解であり、P_{xs} は (3·10) によつて、M_{ss} は (3·6) によつて、W_{xx} は (3·11) に

よつて決定されるものとする。最尤推定値 $\hat{\Pi}_{xu}$ に基く γ の推定値は

$$(4\cdot3)\quad \hat{\gamma}=-\hat{\beta}\,P_{xu}$$

で與えられる。ここに P_{xu} は (3・12) で與えられた値である。σ^2 の推定値は、もし

$$(4\cdot4)\quad bWb'=1$$

ならば

$$(4\cdot5)\quad \hat{\sigma}^2=(1+\nu)/b\,\hat{\Phi}_{xx}b'$$

である。

さて、我々は最尤推定を、(3・1) (2・19) なる制限の下に

$$(4\cdot6)\quad L=(2\pi)^{-\frac{1}{2}TH}\left|\Omega_{xx}^{-1}\right|^{\frac{1}{2}T}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}(x_t-z_t\Pi'_{xz})\,\Omega_{xx}^{-1}(x'_t-\Pi_{xz}z'_t)\right\}$$

に適用しよう。s_t によつて v_t を置換し、(3・1) にラグランジェの未定乘數 λ (D座標のヴェクトル) を掛け、更に(2・19)に同じく未定乘數 ϕ を掛けて、夫々 L の對數に加算すれば、T で割ることによつて次の式を得る。

$$(4\cdot7)\quad A=-\frac{1}{2}H\log 2\pi+\frac{1}{2}\log\left|\Omega_{xx}^{-1}\right|+\beta\,\Pi_{xs}\lambda'+\phi\,(\beta\Phi_{xx}\beta'-1)$$
$$-\frac{1}{2T}\sum_{t=1}^{T}(x_t-u_t\Pi'_{xu}-s_t\Pi'_{xs})\,\Omega_{xx}^{-1}(x'_t-\Pi_{xu}u'_t-\Pi_{xs}s'_t)$$

(4・7) を β について偏微分して

(4・8)　$\dfrac{\partial A}{\partial \beta} = \Pi_{xs}\lambda' + 2\phi\Phi_{xx}\beta'$

これを零とおいてβをかければ

$$\beta\Pi_{xs}\lambda' + 2\phi\beta\Phi_{xx}\beta' = 0$$

(3・1) 及び (2・19) の性質により、ラグランジェの乘數ϕは零でなければならない。從つて (4・7) の第一次微分が零である限り、(2・19) によつて最後的に決定さる比例常數を除いて、$\hat{\beta}$を定めることが出來る。便宜の爲に、我々はノーマリゼイション

(4・9)　$\beta\Omega_{xx}\beta' = 1$

を用いよう。(4・7) の、Ω_{xx} の座標、Π_{xu}, Π_{xs}, β に關する微分を零とおくことによつて、次の結果を得る

(4・10)　$\hat{\Omega}_{xx} = M_{xu} - M_{xs}\hat{\Pi}'_{xs} - M_{xu}\hat{\Pi}'_{xu} - \hat{\Pi}_{xs}M_{sx}$
$\qquad - \hat{\Pi}_{xu}M_{ux} + \hat{\Pi}_{xu}M_{uu}\hat{\Pi}'_{xu} + \Pi_{xs}M_{ss}\hat{\Pi}'_{xs}$

(4・11)　$\hat{\Omega}_{xx}^{-1}(M_{xs} - \hat{\Pi}_{xs}M_{ss}) + \hat{\beta}'\hat{\lambda} = 0$

(4・12)　$\hat{\Omega}_{xx}^{-1}(M_{xu} - \hat{\Pi}_{xu}M_{uu}) = 0$

(4・13)　$\hat{\Pi}_{xs}\hat{\lambda}' = 0$

(4・12) を $\hat{\Pi}_{xu}$ に關して解けば

(4・14)　$\hat{\Pi}_{xu} = P_{xu}$

P_{xu} は (3・12) によつて決定される値である。また (4・11) を $\hat{\Pi}_{xs}$ に關して解けば、

(4・15)　$\hat{\Pi}_{xs} = P_{xs} + \hat{\Omega}_{xx}\hat{\beta}'\hat{\lambda}M_{ss}^{-1}$

これに $\hat{\beta}$ をかけて、$\hat{\lambda}$ に關して解けば

$$(4\cdot16)\quad \hat{\lambda} = -\hat{\beta} P_{xs} M_{ss}$$

(4・16) を (4・15) に代入すれば

$$(4\cdot17)\quad \hat{\Pi}_{xs} = (1-\hat{\Omega}_{xx}\hat{\beta}'\hat{\beta})\, P_{xs}$$

を得る。(4・14)(4・17) より (4・10) を次のように書くことが出來る。

$$(4\cdot18)\quad \hat{\Omega}_{xx} = W_{xx} + \hat{\Omega}_{xx}\hat{\beta}'\hat{\beta} P_{xs} M_{ss} P'_{xs}\hat{\beta}'\hat{\beta}\hat{\Omega}_{xx}$$

今

$$(4\cdot19)\quad \hat{\beta}\, P_{xs}\, M_{ss}\, P'_{xs}\, \hat{\beta}' = \mu$$

とおく。(4・18) の左邊に $\hat{\beta}'$ をかけ (4・9) を用いれば、

$$\hat{\Omega}_{xx}\hat{\beta}' = W_{xx}\hat{\beta}' + \hat{\Omega}_{xx}\hat{\beta}'\hat{\beta} P_{xs} M_{ss} P'_{xs}\hat{\beta}'$$

即ち

$$(4\cdot20)\quad \Omega_{xx}\beta' = \frac{1}{1-\mu} W_{xx}\hat{\beta}'$$

となる。他方、(4・16), (4・17), (4・19) を (4・13) に代入すれば

$$(4\cdot21)\quad P_{xs}\, M_{ss}\, P'_{xs}\, \hat{\beta}' - \mu\hat{\Omega}_{xx}\, \hat{\beta}' = 0$$

となるから、(4・20) を (4・21) に代入して

$$(4\cdot22)\quad (P_{xs}\, M_{ss}\, P'_{xs} - \nu\, W_{xx})\, \hat{\beta}' = 0$$

を得る。ここに

$$(4\cdot23)\quad \nu=\mu/(1-\mu)$$

である。(4·22)が解をもつためには ν は

$$(3\cdot14)\quad |P_{xs}M_{ss}P'_{xs}-\nu W_{xx}|=0$$

の根でなければならない。

ここで (4·20) を (4·18) に代入すれば次の結果を得る。

$$(4\cdot24)\quad \hat{\Omega}=W_{xx}+\mu\left(\frac{1}{1-\mu}\right)^2 W_{xx}\hat{\beta}'\hat{\beta}W_{xx}$$

$$=W_{xx}+\nu(1+\nu)W_{xx}\hat{\beta}'\hat{\beta}W_{xx}$$

(3·14) のどの根を用いるべきかを決定するために、これらの推定値を用いて尤度函數 (likelihood function) の値を計算しよう。それがためには、(3·14)の b の解を (4·4) により正規化して用いるが便利である。すると b は $\hat{\beta}$ に比例する。事實 (4·20) から

$$\hat{\beta}\hat{\Omega}_{xx}\hat{\beta}'=\frac{1}{1-\mu}\hat{\beta}W_{xx}\hat{\beta}'$$

であるから

$$\hat{\beta}=b\sqrt{1-\mu}=b/\sqrt{1+\nu}$$

である。(3·13) の他の解を根 $\nu_2,\cdots\cdots,\nu_H$ に應じて、$b_2,\cdots\cdots,b_H$ とし

$$B^*=\begin{pmatrix} b \\ b_2 \\ \vdots \\ b_H \end{pmatrix}$$

とする。

(4·25)　$|\hat{\Omega}_{xx}| = |W_{xx} + \nu W_{xx} b' b W_{xx}|$

であるから

(4·26)　$|B^*||\hat{\Omega}_{xx}||B^{*\prime}| = |1 + \nu B^* W_{xx} b' b W_{xx} B^{*\prime}|$

而して

$$b W_{xx} B^{*\prime} = (1, 0, \ldots\ldots, 0)$$

であり

$$|B^*|^2 = |W_{xx}|^{-1}$$

であるから、(4·26) を

$$|\hat{\Omega}_{xx}| = |W_{xx}|(1+\nu)$$

と變形することが出來る。(4·10) に $\hat{\Omega}_{xx}^{-1}$ を掛け、(4·6) に代入すれば

(4·27)　$\hat{L} = (2\pi e)^{-\frac{1}{2}TH} |W_{xx}|^{-\frac{1}{2}T} (1+\nu)^{-\frac{1}{2}T}$

これはνが (3·14) の最小根をとる時最大値になる。

かくて定理は證明出來た。$\hat{\sigma}^2$ は

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\beta}\hat{\Omega}_{xx}\hat{\beta}' = b\hat{\Omega}_{xx}b' / b\hat{\Phi}_{xx}b'$$

から計算出來る。もし Φ_{xx} が既知の定マトリックスであるならば、$\Phi_{xx} = \hat{\Phi}_{xx}$ であり、Φ_{xx} がパラメーターの函數ならば、$\hat{\Phi}_{xx}$ は推定値に關する同一の函數となる。

もし

(4·28)　$\hat{\gamma}=-\hat{\beta}\,\Pi^{*}_{xu}$

をきめるならば、(4·9) から直ちに

(4·29)　$\hat{\gamma}=-\hat{\beta}\,(\hat{\Pi}_{xu}-\hat{\Pi}_{xs}M_{su}M_{uu}^{-1})$

となる。$\hat{\beta}$は$\hat{\Pi}_{xs}$を消去するから、(4·3) が云える。Π_{xv}の推定値は (4·17) で與えられ、Ω_{xx}の推定値は

(4·30)　$\hat{\Omega}_{xx}=W_{xx}+\nu W_{xx}b'bW_{xx}$

である。

V　束縛條件の尤度比檢定　(Likelihood ratio test)

今まで問題の單一方程式のある幾つかの係數が零であると云う制限をおくことによつて、その方程式はアイデンティファイされていると假定して來た。第二節において、少くとも (G−1) 個のかかる制限が必要であることを述べた。若し先決變數の上におかれた制限の數Dが (H−1) 個以上あるならば、我々はこれらのD個の係數が零であると云う假說を、もつと少い係數が零である場合に比べて檢定することが出來る。これはΠ_{xv}の階數が (H−1) の場合を、階數がHの場合に比べて檢定するのとエキヴァレントである。

さて直觀的に、(3·14) の最小根νは、P_{xv}がどれほどシンギュラー・ケースに近いかを示している事が分る。この統計量は、Π_{xv}が階數 (H−1) であると云う假說を檢定するのに用いられる。[1] その檢定法は次の定理によつ

て述べることが出來る。

〔定理二〕假說一、二、三、四の下に、Π_{xv} が階數 $(H-1)$ であると云う假說を、階數が H である場合にくらべて檢定する尤度比 (likelihood ratio) の基準は

$$(5\cdot1)\quad (1+\nu)^{-\frac{1}{2}T}$$

である。ここに ν は (3・14) の最小根である。

この證明は次のようになされる。若し Π_{xz} に何らの制限がなかつたなら、Π_{xz} の最尤推定値は P_{xz}、Π_{xu} の最尤推定値は P_{xu}、Ω_{xx} の最尤推定値は W_{xx} となる。然る時尤度函數は

$$(5\cdot2)\quad (2\pi e)^{-\frac{1}{2}TH}\left|W_{xx}\right|^{-\frac{1}{2}T}$$

である。これと (4・27) の尤度函數（それは、Π_{xv} の階數が $(H-1)$ であると云う假定のもとに最大ならしめられた）の比は (5・1) である。定理二を擴充してもつと一般的な一定の條件の下で

$$(5\cdot3)\quad -2\log\left[(1+\nu)^{-\frac{1}{2}T}\right]=T\log(1+\nu)$$

は、漸近的に自由度 $(D-H+1)$ の χ^2 分布をなすと云うことが云える。從つてその檢定は、(5・3) を、必要な零係數（卽ちアイデンティファイされるための最小數）を超える數だけの自由度をもつ χ^2 分布と比較する事によつて果し得る。

(1) P L. Hsu: "On the problem of rank and the limiting distribution of Fisher's test function" *Annals of Eugenics*, 1941 pp. 39—41.

VI　小標本理論に基く信頼區間 (confidence regions)

もしシステムに含まれるすべての先決變數が外生的 (exogenous) であるならば、我々は一つの方程式の係數に對する信頼區間を小標本理論に基いて算定することが出來る。

今假設一、二の他に、次の假設を設けよう。

〔假設五〕 $z=(u_t,v_t)$ の座標はすべてエクゾジニアスである。モメント・マトリックス M_{zz} はナン・シンギュラー、即ちその行列式は零でないとする。問題の單一方程式の偶然要素 (disturbances) は、平均値零、分散 σ^2 の獨立な正規分布をなしている。

さて、一團の觀察値 (x_1,u_1,v_1), …… (x_T,u_T,v_t) を考えよう。もし β と γ とが知られるならば、次の T 個の値を得ることが出來る。

$$(6\cdot1)\quad \omega_t=\beta x'_t+\gamma u'_t\quad (t=1,\cdots\cdots,T)$$

ω_t の u_t 及び s_t の上への標本回歸係數は次の式で與えられる。

$$(6\cdot2)\quad c=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\omega_t u_t M_{uu}^{-1}=\beta M_{xu}M_{uu}^{-1}+\gamma$$

$$(6\cdot3)\quad e=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\omega_t s_t M_{ss}^{-1}=\beta M_{xs}M_{ss}^{-1}$$

二箇のヴェクトル e 及び c は平均値零、共變マトリックス

$$(6\cdot4)\quad \varepsilon\,(c'c)=\sigma^2 M_{uu}^{-1}$$

$$(6\cdot5)\quad \varepsilon\,(e'e)=\sigma^2 M_{ss}^{-1}$$

をもつて、獨立な正規分布をなしている。從つて通常の回歸理論を用いて

$$(6\cdot6)\quad c=\frac{1}{\sigma^2}\,cM_{uu}c'=\frac{1}{\sigma^2}\left[\beta M_{xu}M_{uu}^{-1}M_{ux}\beta'+\beta M_{xu}\gamma'+\gamma M_{ux}\beta'+\gamma M_{uu}\gamma\right]$$

$$(6\cdot7)\quad E=\frac{1}{\sigma^2}\,eM_{ss}e'=\frac{1}{\sigma^2}\,\beta M_{xs}M_{ss}^{-1}M_{sx}\beta'=\frac{1}{\sigma^2}\beta\,(M_{xv}-M_{xu}M_{uu}^{-1}M_{uv})\,(M_{uv}-M_{vu}M_{uu}^{-1}M_{uv})$$
$$(M_{vx}-M_{vu}M_{uu}^{-1}M_{ux})\beta'$$

$$(6\cdot8)\quad A=\frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\omega_t^2-c-E\right)=\frac{1}{\sigma^2}\,\beta W_{xx}\beta'$$

を計算すれば、それらは夫々自由度 $F, D, T-K$ の χ^2 分布として獨立に分布している。この何れの二つの比も、F—分布をなす。

上の結果から求むる信頼區間を得ることが出來る。即ち

〔定理三〕假說一、二、五が眞であるとする。今 Φ_{xx} が與えられたマトリックスであるとして、ノーマリゼイションが

$$(6\cdot9)\quad \beta\Phi_{xx}\beta'=1$$

であるならば、

(a)信頼度 ϵ の β に對する信頼區間は (6·9) 及び次の關係式

$$(6\cdot10)\quad \frac{\beta^* M_{xs} M_{ss}^{-1} M_{sx} \beta^{*\prime}}{\beta^* W_{xx} \beta^{*\prime}} \cdot \frac{T-K}{D} \leqq F_{D,T-K}(\epsilon)$$

を滿足するあらゆるから β^* 構成される。ここに $F_{D,T-K}(\epsilon)$ は $\beta^*=\beta$ に對して (6·10) の確率が ϵ であるように選ばれている。

(b) β 及び γ の同時信頼區間は (6·9) 及び

$$(6\cdot11)\quad (\beta^* M_{xu} M_{uk}^{-1} M_{ux} \beta^{*\prime} + \beta^* M_{xu} \gamma^{*\prime} + \gamma^* M_{xu} \beta^{*\prime} + \gamma M_{uu} \gamma^* + \beta^* M_{xs} M_{ss}^{-1} M_{sx} \beta^{*\prime}) / \beta^* W_{ss} \beta^{*\prime} \cdot \frac{T-K}{K} \leqq F_{K,T-K}(\epsilon)$$

を滿足するあらゆる β^* 及び γ^* から構成される。

もしノーマリゼーションが $\sigma^2=1$ であるならば

(c)信頼度 ϵ_1、ϵ_2 の β に對する信頼區間は、次の關係式を滿足するあらゆる β^* よりなる。即ち

$$(6\cdot12)\quad \beta^* M_{xs} M_{ss}^{-1} M_{sx} \beta^{*\prime} \leqq \chi^2_D(\epsilon_1)$$

$$(6\cdot13)\quad \chi^2_{T-K}(\epsilon_2) \leqq \beta^* W_{xx} \beta^{*\prime} \leqq \overline{\chi^2}_{T-K}(\epsilon_2)$$

ここに $\chi^2_D(\epsilon_1)$ は $\beta^*=\beta$ なる時に (6·12) の確率が ϵ_1 なるように、更に $\chi^2_{T-K}(\epsilon_2)$ 及び $\overline{\chi^2}_{T-K}(\epsilon_2)$ は $\beta^*=\beta$ なる時 (6·13) の確率が ϵ_2 であり

$$(6\cdot14)\quad \overline{\chi^2}(\epsilon_2) \leqq 1 \leqq \chi(\epsilon_2)$$

なるように選ばれている。

(d) β 及び γ の同時信頼區間は (6・13) 及び

$$(6\cdot15)\quad (\beta^* M_{xu} M_{uu}^{-1} M_{ux} \beta^{*\prime} + \beta^* M_{xu} \gamma^{*\prime} + \gamma^* M_{ux} \beta^{*\prime} + \gamma^* M_{uu} \gamma^{*\prime} + \beta^* M_{xs} M_{ss}^{-1} M_{sx} \beta^{*\prime}) \geqq \chi^2_K(\epsilon_1)$$

を滿足するあらゆる β^* 及び γ^* からなる。

區間(c)は β^*—空間における楕圓體の內部及びその外殼からなり、區間(d)においても $\beta^*\gamma^*$—空間について同樣である。區間(a)は β^*—空間における二次曲面と圓錐體の內部の交切面よりなる。區間(b)についても $\beta^*\gamma^*$—空間について同樣である。他の多くの固定變量の上への回歸をとれば、もつと種々の信頼區間をつくる事が出來るが、ここではその最良のものを定理三に示している。[1)]

(1) この方法を經濟資料へ適用した例としては次の文獻がある。

M. S. Bartlett, "A note on the stochastic estimation of demand and supply relations from time series". *Econometrica* July 1948 pp. 323—329.

（本稿は文部省科學研究費交付金による研究「經濟計畫の理論的・統計的研究」の一半をなすものである）

（一九五〇・六・三〇）